MANUAL DE RECUPERACIÓN

PARA

MATEMÁTICAS 1

Coordina:	*Manuela Valle*
Participan:	*Juan Carlos Jiménez*
	Porfirio Pérez
	Jesús Gil
	Mª Teresa Sanz
	Alfredo Jiménez
Asesora:	*Ana Mª Jiménez*

1: NÚMEROS REALES

1. INTERVALOS

Intervalo abierto de extremos a y b: $(a,b) = \{ x \in IR / a < x < b \}$ o———o

Intervalo cerrado de extremos a y b: $[a, b] = \{ x \in IR / a \le x \le b \}$ •———•

Intervalo semiabierto …: $[a, b) = \{ x \in IR / a \le x < b \}$ •———o

Semirrectas: $(-\infty, b) = \{ x \in IR / x < a \}$ ←———o; $(a, -\infty) = \{ x \in IR / x > a \}$ o———→

$(-\infty, b] = \{ x \in IR / x \le a \}$ ←———•; $(a, -\infty) = \{ x \in IR / x \ge a \}$ •———→

Entornos: $E(x_o, r) = (x_o - r, x_o + r)$; $E^*(x_o, r) = E(x_o, r) - \{x_o\} = (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$.

2. VALOR ABSOLUTO

$$\text{Si } x \in IR,\quad |x| = \begin{cases} x & \text{si } x < 0 \\ -x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- Propiedades: 1. $|a| \ge 0$ 2. $|a\cdot b| = |a| \cdot |b|$ 3. $|a+b| \le |a|+|b|$

- Si $|x| < a,\ a > 0 \Rightarrow -a < x < a$; si $|x| \ge a,\ a > 0 \Rightarrow x \ge a$ ó $x \le -a$
- Si $a \ne b \Rightarrow |a-b| = |b-a|$

3. POTENCIAS Y RAÍCES

Si $a \in IR$ y $n \in IN$, se define la potencia a^n como:
$$\begin{cases} a^n = \overbrace{a\cdot a\cdot a\ldots\cdot a}^{n-veces}, & \text{si } a > 1 \\ a^1 = a & \\ a^0 = 1, & \text{si } a \ne 0 \end{cases}$$
Además: $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$

La raíz enésima de un nº a es otro nº b cuya potencia enésima es igual que a. Se representa con la expresión $\sqrt[n]{a}$: $\boxed{\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a}$.

POTENCIAS	RAÍCES
1. Producto de potencias con la misma base $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	Prop. Fundam.: $\sqrt[n]{a^s} = \sqrt[n\cdot p]{a^{s\cdot p}}$
1'. Cociente de potencias con la misma base $a^p : a^q = a^{p-q}$	
2. Producto de potencias con el mismo exponente $a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$	2. Producto de raíces con el mismo índice $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\cdot b}$
2'. Cociente de potencias con el mismo exponente $a^p : b^p = (a : b)^p$	2'. Cociente de raíces con el mismo índice $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$
3. Potencia de una potencia $(a^p)^q = a^{p\cdot q}$	3. Raíz de un raíz $\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[p\cdot q]{a}$
Potencia de una raíz: $\left(\sqrt[p]{a}\right)^q = \sqrt[p]{a^q}$	

4. LOGARITMOS

Si $a, x > 0$ con $a \ne 1$, se llama <u>logaritmo en base a de x</u> al exponente, y, al que hay que elevar la base, a, para obtener x: $\boxed{y = \log_a x \iff a^y = x}$.

Logaritmos destacados: $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $\log_a a^n = n$

Operaciones: $\log_a (x\cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $\quad \log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$ $\quad \log_a x^n = n\cdot \log_a x$

Cambio de base: $\log_a x = \dfrac{\log x}{\log a}$; en general: $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$

EJERCICIOS

1.- Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:

a) Todos los números decimales son racionales
b) Todos los números son reales
c) La suma de dos racionales es racional
d) La suma de dos irracionales es irracional

2.- Clasifica estos números según sean naturales, enteros, racionales o reales:

$\sqrt[3]{27}+2$, $3,\widehat{5}$, $\frac{\pi}{3}$, $-\frac{14}{2}$, $2,0100100...$, $9\sqrt{2,\widehat{7}}$, π^2 , $\sqrt{\frac{1,21}{25}}$, $\frac{21}{3}$

3.- Efectúa :

a) $3,4\widehat{5}+2,46=$

b) $3,\widehat{4}+2,\widehat{5}-3,4\widehat{2}=$

c) $\sqrt{0,18\widehat{7}}=$

d) $\sqrt{\frac{1}{0,00\widehat{1}}}=$

Sol: a) $5,91\widehat{5}$, b) $2,5\widehat{7}$, c) $0,4\widehat{3}$, d) 30

.

4.- Expresa en intervalos y con desigualdades los siguientes conjuntos:

a) Reales comprendidos entre 2 y 7, incluido el 7

b) Reales menores que –3

c) Reales mayores o iguales que –3

d) Reales que no son menores que –2 ni mayores que 10

5.- Sean : $A=\{x\in R/-3\leq x\leq 8\}$, $B=\{x\in R/x>-1\}$ y $C=\{x\in R/-1\leq x<1\}$. Calcula:

a) $A\cup B\cup C$

b) $A\cap B\cap C$

c) $(A\cap B)\cup C$

d) $(R\cap B)\cap(R\cup A)$

Sol: a) [-3, ∞), b) (-1, 1), c) [-1, 8], d) B

6.- Escribe los intervalos a los que pertenece x si:

a) $-3\leq x$ y $x\leq 10$

b) $x>10$ ó $x\geq 15$

c) $x>-\frac{3}{4}$ y $3>x$

d) $-0,02\leq x<0$

7.- Escribe los intervalos a los que pertenece x si:

a) $-3\leq\frac{x}{4}+1\leq 7$

b) $4>-x+3>0$

c) $-2<\frac{x-4}{2}\leq 10$

d) $\frac{7}{4}>\frac{2-3x}{2}>1$

Sol: a) [-16, 24], b) (-1, 3), c) (0, 24], d) (-1/2, 0)

8.- Escribe los intervalos a los que pertenece x:

a) $|x-5|<7$

b) $|2x+6|\le 4$

c) $\left|\dfrac{x+2}{2}-1\right|>3$

d) $|x-3|+|x-6|\ge 6$

Sol: a) (-2, 12), b) [-5, -1], c) (-∞, -6)∪(6, ∞), d) (-∞, 3/2)∪(15/2, ∞)

9.- Racionaliza:

a) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{4}}$

b) $\dfrac{2}{2+\sqrt{2}}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$

d) $\dfrac{4}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Sol: a) $2\sqrt[3]{2}$, b) $2-\sqrt{2}$, c) $\dfrac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$, d) $\dfrac{8+2\sqrt{5}+6\sqrt{3}-4\sqrt{15}}{11}$

10.- Simplifica las expresiones siguientes:

a) $\sqrt[3]{125}\cdot\sqrt[3]{5^6}$

b) $\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{1}{x^4}}\cdot\sqrt[4]{x^{10}}$

Sol: a) 125, b) $x\sqrt[6]{x^5}$

11.- Calcula y simplifica:

a) $8\sqrt{8}+5\sqrt{2}+4\sqrt{20}-12\sqrt{5}$

b) $\sqrt{1+x}-2\sqrt{9+9x}-3\sqrt{25+25x}$

c) $5\sqrt{27}+3\sqrt{12}-5\sqrt{75}$

d) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{18}\right)^2+3\sqrt{56}$

Sol: a) $21\sqrt{2}-4\sqrt{5}$, b) $-20\sqrt{1+x}$, c) $-4\sqrt{3}$, d) 25

12.- Opera y simplifica:

a) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}-\dfrac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\dfrac{2}{\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{5}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{\sqrt{27}-3}\cdot\sqrt{\sqrt{27}+3}}$

Sol: a) $-3\sqrt{2}$, b) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

13.- Calcula x en las siguientes ecuaciones:

a) $\lg_x 9=2$

b) $\log(x+1)=2$

c) $\lg_3 x^2=-3$

d) $\lg_{\frac{1}{2}}\dfrac{1}{8}=x$

14.- Calcula x en las siguientes ecuaciones:

a) $\lg_{x+1}81=4$

b) $\ln\dfrac{1}{e}=x$

c) $\ln\sqrt{e}=x$

d) $\ln x^3=6$

15.- Sabiendo que $\lg_3 x = 1{,}1$ calcula:

a) $\lg_3 \sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}$ b) $\lg_3 9x^2$

c) $\lg_9 \sqrt{x}$ d) $\lg_{\frac{1}{3}} x^2$

Sol: a) -1/3, b) 4,2, c) 0,275, d) -2,2

16.- Sabiendo que log A = -2,2, log B = 0,8 y log C=2,4, calcula:

a) $\log \dfrac{A^2B^3}{C^4}$ b) $\log \sqrt{\dfrac{AC}{B^3}}$

c) $\log \sqrt[3]{10A}$ d) $\log \dfrac{\sqrt[3]{A}\sqrt{B}}{\sqrt{1000C}}$

Sol: a) -11,6, b) -1,1, c) -0,4, d) -1,03

17.- Expresa en forma de un solo logaritmo:

a) $\dfrac{1}{2}\log a - 3\log b - \log c$ b) $3\ln a - \ln b + 6\ln c$

c) $\dfrac{\log a - \log b}{3}$ d) $\dfrac{\ln 27}{\ln \frac{1}{3}}$

18.- Expresa estos números en notación científica:

a) $0{,}00356 \cdot 10^{12}$ b) $69800000 \cdot 10^{-4}$

c) $0{,}4 \cdot 10^{-2}$ d) $18{,}3 \cdot 10^{-1}$

19.- Expresa el resultado en notación científica:

a) $3{,}2 \cdot 10^{-6} + 28{,}8 \cdot 10^{-7}$ b) $\dfrac{28{,}8 \cdot 10^{-7}}{3{,}2 \cdot 10^{-6}}$

c) $3 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{6}$ d) $\sqrt{12{,}1 \cdot 10^{7} \cdot 0{,}09}$

Sol: a) $6{,}08 \cdot 10^{-6}$, b) $9 \cdot 10^{-1}$, c) 1,65, d) $3{,}3 \cdot 10^{3}$

20.- Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{5{,}83 \cdot 10^{6} + 2{,}45 \cdot 10^{5}}{3 \cdot 10^{-5}}$ b) $\dfrac{\left(3{,}2 \cdot 10^{5} - 1{,}5 \cdot 10^{2}\right) \cdot \left(2 \cdot 10^{-5}\right)}{4{,}2 \cdot 10^{-8}}$

Sol: a) $2{,}025 \cdot 10^{11}$, b) $1{,}523 \cdot 10^{7}$

2: ECUACIONES Y SISTEMAS

1. POLINOMIOS

Si **r** es **raíz** de $P(x)$, según el **Tª del resto** la división de $P(x)$ entre $x-r$ es exacta, y existirá $C(x)$ tal que: $\mathbf{P(x) = (x-r) \cdot C(x)}$. Tomado una raíz de $C(x)$ -que lo será también de $P(x)$- y repitiendo el proceso, podemos factorizar el polinomio $P(x)$ mediante **divisiones sucesivas** entre sus raíces:

$$\boxed{P(x) = a_n \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2) \cdot (x - r_3) \cdot \ldots}$$

2. ECUACIONES

Una ecuación es **polinómica** si puede reducirse a la forma $P(x)=0$. Para resolver una ecuación de grado superior a 2, en general, es preciso factorizar $P(x)$. Esto se puede evitar a veces con un cambio de variable, como en las ecuaciones bicuadradas.

Una ecuación es **racional** si aparecen fracciones algebraicas. Pueden reducirse a la forma $P(x) / Q(x)=0$. Se resuelve directamente reduciendo a común denominador y eliminando los denominadores. **Nota**: las raíces del denominador no son soluciones de la ecuación.

Una ecuación es **irracional** si la incógnita aparece bajo el signo radical. Para resolverlas se aísla el término radical y se elevan los dos miembros a la potencia del índice. **Nota**: es preciso comprobar las soluciones.

Una ecuación es **exponencial** si la incógnita se encuentra en el exponente. Para resolverla, se expresan los dos miembros como <u>potencias de la misma base</u>, pues: $a^x = a^y \Rightarrow x = y$. Si no es posible, se realiza un <u>cambio de variable</u> o se aplican <u>logaritmos</u>.

Una ecuación es **logarítmica** si la incógnita se encuentra dentro de una expresión logarítmica. Para resolverla, se expresan los dos miembros como logaritmos de la misma base, pues: $\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$. Al no ser el dominio del logaritmo todo $\mathbb{R}$, conviene comprobar las soluciones.

3. INECUACIONES

Una inecuación es **polinómica** si puede reducirse a una de las formas $P(x)<0$, $P(x)>0$, …

- Si el polinomio es de grado 1, la inecuación se dice lineal o de primer grado. Se resuelve despejando la incógnita directamente, teniendo en cuenta las propiedades de las desigualdades.

- Si el polinomio es de grado dos o superior, para resolverla es necesario factorizar el polinomio; las raíces de éste determinan $n+1$ intervalos abiertos en la recta, de los cuales son solución los que cumplen la desigualdad (basta probarlo con un valor del interior del intervalo). Si la desigualdad no es estricta, las raíces del polinomio también serán soluciones de la ecuación.

Una inecuación es **racional** si puede reducirse a una de las formas $P(x) / Q(x) < 0$, …

Su resolución equivale a la de la inecuación polinómica $P(x) \cdot Q(x) < 0$, …, salvo que las raíces de $Q(x)$ nunca pueden ser solución de la inecuación racional.

4. SISTEMAS DE ECUACIONES

Un sistema **lineal** formado por más de 2 ecuaciones es recomendable resolver por el **Método de Gauss** (reducción-sustitución): se convierte el sistema original en un **sistema escalonado** (aplicando reducción), y se sustituye en el orden contrario al de reducción.

Si el sistema es **no lineal**, no hay un procedimiento estándar para resolverlo. Aunque si una ecuación sí es lineal, siempre se puede aplicar sustitución.

5. SISTEMAS DE INECUACIONES

Para resolver un sistema de inecuaciones **lineales con una incógnita** se resuelve cada inecuación por separado y se cortan las soluciones.

Un sistema de inecuaciones **lineales con dos incógnitas** se resuelve gráficamente como la región del plano intersección de los semiplanos correspondientes a cada inecuación.

EJERCICIOS

1.- Calcula el cociente y el resto en las siguientes divisiones:

a) $(x^4+3x^3-2x^2+3x+2)\div(x^2-2x+3)$ b) $(x^5-3x^3+2x+1)\div(x^2-x+1)$

c) $(x^4-3x)\div(x^2+1)$

Sol: a) R(x) = -2x - 13, b) R(x) = x+5, c) R(x)= -3x + 1

2.- Calcula el cociente y el resto en las siguientes divisiones:

a) $(3x^3+2x^2-x+2)\div(x+1)$ b) $(3x^4-2)\div(x-3)$

c) $(x^5-x^3)\div(x-1)$

Sol: a) R=2, b) R=241, c) R=0

3.- Calcula a y b en los siguientes polinomios si:

a) (x^4-ax^2+b) es divisible entre $(x-2)$ y entre $(x-1)$

b) (x^3+ax^2+bx-3) es divisible por $(x+3)$ y tiene resto 3 entre $(x+2)$

c) $(x^{21}+a)$ es divisible por $(x+1)$

Sol: a) a=5, b=4, b) a=3, b= -1, c) a=1

4.- Escribe un polinomio que cumpla las siguientes condiciones:

a) Es de grado cuatro y es divisible por $(x+2)$ y por x^2

b) Es de grado cuatro y no tiene divisores de grado uno

c) Es de grado tres y su única raíz real es 3

5.- Descompón en factores primos los siguientes polinomios:

a) $P(x)=x^3+3x^2-4x-12$ b) $P(x)=2x^3+3x^2-8x-12$

c) $P(x)=x^6+x^4-2x^2$

6.- Descompón las siguientes expresiones:

a) x^4-16a^4 b) $25x^6-30x^3a+9a^2$

c) $ax^2-bx^2+by^2-ay^2$

Sol: a) $(x-2a)(x+2a)(x^2+4a^2)$, b) $(5x^3-3a)^2$, c) $(x+y)(x-y)(a-b)$

7.- Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{x+2}{x^2+2x+1}+\dfrac{x-3}{x^2-1}$ b) $\dfrac{a-b}{b^2-a^2}+\dfrac{2}{a+b}$

c) $\dfrac{2x^2+2x}{x^3+x^2}-\dfrac{x^3+2x^2}{x^5+2x^4}-\dfrac{3}{x}$

Sol: a) $\dfrac{2x^2-x-5}{(x+1)^2\cdot(x-1)}$, b) $\dfrac{1}{a+b}$, c) $\dfrac{-1-x}{x^2}$

8.- Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{x+2}{x^3-x^2}\cdot\dfrac{x^2-x}{x-2}$ b) $\dfrac{9a^2-1}{a+1}\div\dfrac{3a-1}{a^2-1}$ c) $\dfrac{4}{x+2}\div\left(1-\dfrac{x+5}{x+2}\cdot\dfrac{x-3}{x+2}\right)$

Sol: a) $\dfrac{x+2}{x(x+2)}$, b) $3a^2-2a-1$, c) $\dfrac{4x+8}{2x+19}$

9.- Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\left(\dfrac{x^2}{x-1}+\dfrac{x^2}{x+1}\right)\cdot\dfrac{x^2-1}{2x^3}$ b) $\left(\dfrac{2x+1}{x+1}-\dfrac{2x+1}{x-2}\right)\div\dfrac{2x+1}{x^2+x}$

c) $\left(\dfrac{a^3-a^2}{a-1}-1\right)\cdot\dfrac{1}{a-1}+1$

Sol: a) 1, b) $\dfrac{-3x}{x-2}$, c) a+2

10.- Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+4x+3}\right)^2$ b) $8\div\left(\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}}-1\right)$

c) $\dfrac{3x}{x-\dfrac{1}{x}}-\dfrac{3}{x^2+1}$

Sol: a) $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+6x+9}$, b) -8(x+1), c) $\dfrac{3(x^4+1)}{x^4-1}$

11.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x-3)^2-2x=(x-2)^2+21$ b) $\dfrac{(x-4)^2+x}{3}+\dfrac{x+1}{6}=\dfrac{(x-2)^2}{3}+(x-5)$

c) $(x-2)^4-10(x-2)^2+9=0$

Sol: a) -4, b) 5 , c) 5, -1, 3, 1

12.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^3-9x=0$ b) $x^3-6x^2+11x-6=0$

c) $3x^3+12x^2+3x-18=0$

Sol: a) -3, 0, 3 , b) 1, 2, 3 , c) –2, 1, -3

13.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{x-1}{x-3}+\dfrac{2x-2}{x+3}=3$ b) $\dfrac{x+2}{x-2}-\dfrac{3x}{x+2}=1$

c) $\dfrac{2x-1}{x+2}+\dfrac{x-1}{x-2}=3$

Sol: a) 5, b) 4, -2/3, c) 3

14.- Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} 2x+y=1 \\ 2x^2-y^2=-1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x-6y=0 \\ x(2y-1)-(y+1)^2=-1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-3y=2 \\ x^2-3y^2=4 \end{cases}$

Sol: a) (0,1), (2,-3), b) (0,0), (3,1), c) (4,2) doble

15.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+2}=5$ b) $\sqrt{2x+2}-\sqrt{4x-3}=1$

c) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=\sqrt{x-4}$

Sol: a) 7, b) 1, c) 5

16.- Estudia estos sistemas y resuélvelos cuando sea posible:

a) $\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ -3x+y=2 \\ -5y+9z=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ -x+2y-3z=-10 \\ 2x+3y+z=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x+y-z=2 \\ 3y-5z=3 \end{cases}$

Sol: a) incompatible, b) (3,-2,1), c) $\left(\frac{3-2z}{3},\frac{3+5z}{3},z\right)$

17.- Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{2x+4}{4}\le 4-x$ b) $\frac{3x-2}{4}-\frac{2x-3}{3}>\frac{(x-2)}{4}$

c) $\begin{cases} \frac{x-3}{2}<4 \\ 3-x<12 \end{cases}$

Sol: a) (-∞, 2] , b) (-∞, 2) , c) (-9, 11)

18.- Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $(2x+3)(3x-5)\le 0$ b) $\frac{3x+7}{2x-4}>2$

c) $6x^2+7x-3<0$

Sol: a) $\left[-\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right]$, b) (2, 15), c) $\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{3}\right)$

19.- Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{x^2-4}{x}\ge 0$ b) $\frac{x-1}{x^2-2x-3}<0$

c) $\frac{x^2-8x+12}{x^2-4x}\le 0$

Sol: a) [-2, 0)∪[2, ∞), b) (-∞, -1)∪(1, 3), c) (0, 2]∪(4, 6]

20.- Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{2}>1 \\ y<x-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y-x\le 3 \\ y+x\ge -3 \\ x<3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2-4x-y\le -3 \\ x-y\ge 1 \end{cases}$

21.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2^{2x+3} = 128$ b) $9^{x+2} = 27$

c) $4^{x} - 9 \cdot 2^{x} + 8 = 0$ c) $9^{x^2-3} = \frac{1}{3}$

Sol: a) 2, b) -1/2, c) 0 y 3, d) $\sqrt{\frac{7}{2}}$

22.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $128^{x+1} = 2^{x^2-x-2}$ b) $3^{x} \cdot 9^{x} = 9^{3}$

c) $6^{1-x} + 6^{x} = 7$ d) $2^{-x} = 8^{3-x}$

Sol: a) 1, 7, b) 2, c) 1, d) 9/2

23.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\lg_2 \sqrt{8} = x$ b) $\lg_9 x = 3$

c) $\lg_x 4 = \frac{1}{2}$ d) $\ln \frac{1}{\sqrt{e}} = x$

Sol: a) 3/2, b) 729, c) 16, d) -1/2

24:- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\log(3x-1) - \log(2x+3) = -\log 25 + 1$ b) $\log x = 1 + \log(22 - x)$

c) $\frac{\log(5 + x^2)}{\log(2 - x)} = 2$ c) $\log(x+3) = \log(2x-4)$

Sol: a) 1, b) 20, c) -1/4, d) 7

25.- Resuelve los sistemas:

a) $\begin{cases} 2^{x} + 5^{y} = 9 \\ 2^{x+2} - 5^{y+1} = -9 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2^{x} + 2^{y} = 12 \\ 2^{x} - 2 \cdot 2^{y} = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \lg_3 x + \lg_3 y = 0 \\ x + y = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} \lg_2 x + 3\lg_2 y = 5 \\ \lg_2 x^2 - \lg_2 y = 3 \end{cases}$

Sol: a) x=2, y=1, b) x=3, y=2, c) $\frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, d) x=4, y=2

3: NÚMEROS COMPLEJOS

1. NUMEROS COMPLEJOS EN FORMA BINÓMICA

Llamamos **unidad imaginaria**, **i**, al nº real que elevado al cuadrado da -1: $i = \sqrt{-1}$

Llamamos **número complejo**, en **forma binómica**, a una expresión de la forma **a+bi**, siendo a y b nºs reales; **a** es la parte real y **bi** es la parte imaginaria.

El punto $P = (a, b)$ representa el complejo $a + bi$. El punto P es el **afijo** del nº complejo.

A la forma (a,b) la llamaremos **forma cartesiana** del nº complejo $a+bi$.

Dos complejos son **iguales** si lo son sus partes real e imaginaria. En este caso, estarán representados por el mismo afijo.

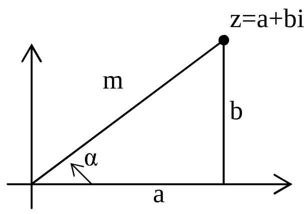
Dos complejos son **opuestos** si sus partes real e imaginaria son opuestas. Si llamamos z al complejo $a + bi$, su opuesto $-a - bi$ se representa por **-z**.

Dos complejos son **conjugados** si tienen la parte real igual y partes imaginarias opuestas. Si $z = a + bi$ su conjugado será $a - bi$ y se representa por $\bar{z}$.

2. OPERACIONES EN FORMA BINÓMICA

- SUMA: se suman sus partes real e imaginaria $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\, i$
- PRODUCTO: Se aplican la P. Distributiva y que $i^2 = -1$: $(a + bi) \cdot (c + di) = (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)\, i$
- COCIENTE: Se racionaliza el denominador, multiplicando por el conjugado.
- POTENCIA: Se desarrolla la potencia teniendo en cuenta que $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, … Como $i^4 = 1$, las potencias de i son cíclicas, y para calcular i^n basta con calcular i^r siendo $n = 4 \cdot c + r$.

3. NÚMEROS COMPLEJOS EN FORMA POLAR



Se llama **módulo** del complejo $z = a + bi$ al nº real $\mathbf{m} = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Se llama **argumento** del complejo $z = a + bi$ al ángulo $\boldsymbol{\alpha}$ que forman el semieje positivo de abscisas y la semirrecta de origen $O = (0, 0)$ que pasa por el afijo $P = (a, b)$ del complejo.

$$\text{Como} \quad tg\alpha = \frac{b}{a} \Rightarrow \begin{cases} si \quad a \neq 0, \quad \alpha = arctg(b/a) \\ si \quad a = 0, \quad \alpha = \pi/2, 3\pi/2 \end{cases}$$

La determinación de α no es única. En $[0,2\pi)$, hay 2 soluciones que difieren en π radianes. La buena depende del cuadrante en que esté el complejo.

Sustituyendo $a = m \cdot \cos\alpha$ y $b = m \cdot sen\,\alpha$ en $z = a + bi$, obtendremos la **forma trigonométrica** del complejo: $z = m \cdot \cos\alpha + m \cdot sen\alpha\, i = \mathbf{m\, (cos\alpha + i\, sen\alpha)}$

Podemos representar el complejo simplemente de la forma $z = \mathbf{m_\alpha}$ que se llama **forma polar**.

Las fórmulas de paso de F. Binómica a F. Polar y viceversa serán:

$$B \to P: \begin{cases} m = \sqrt{a^2 + b^2} \\ \alpha = arctg\dfrac{b}{a} \end{cases} \qquad P \to B: \begin{cases} a = m \cdot \cos\alpha \\ b = m \cdot sen\alpha \end{cases}$$

Se verifica que: $m_\alpha = m'_\beta \Leftrightarrow m = m'$ y $\alpha = \beta + 2k\pi$

4. OPERACIONES EN FORMA POLAR

Suma: Se pasan a forma binómica, se opera y se pasan a forma polar.

Producto: $m_\alpha \cdot m'_\beta = (m \cdot m')_{\alpha+\beta}$

Cociente: $\dfrac{m_\alpha}{m'_\beta} = \left(\dfrac{m}{m'}\right)_{\alpha-\beta}$

Potencia: $(m_\alpha)^n = (m^n)_{n\alpha}$

Expresado en forma trigonométrica sería: $[m(\cos\alpha + i\,\text{sen}\alpha)]^n = m^n[\cos(n\alpha) + i\,\text{sen}(n\alpha)]$. Para $m = 1$ se obtiene la **fórmula de De Moivre**: $\mathbf{(\cos\alpha + i\,sen\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\,sen(n\alpha)}$

Radicación:

Dado un complejo, m_α, su raíz n-ésima, r_θ, verificará $(r_\theta)^n = m_\alpha \Rightarrow (r^n)_{n\theta} = m_\alpha$

Luego los módulos serán iguales y los argumentos diferirán en un nº entero de vueltas:

$$r^n = m \Rightarrow r = \sqrt[n]{m}, \qquad n\theta - \alpha = k\cdot 2\pi \Rightarrow \theta = \frac{\alpha + k\cdot 2\pi}{n} \quad \text{con } k \in Z$$

Así, todo nº complejo no nulo tiene **n raíces** n-ésimas **distintas**: $\boxed{\sqrt[n]{m_\alpha} = \left(\sqrt[n]{m}\right)_{\frac{\alpha+k\cdot 2\pi}{n}}}$, donde $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

En particular, todo nº real tiene n raíces n-ésimas, algunas de las cuales pueden ser reales.

EJERCICIOS

1. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $4i + (3 - 5i) + (2 - i) + (1 - i)$ b) $(2 + 4i) + (3 - 2i) - 2(-4 + 7i)$

c) $(5 - 4i) - (-3 + 2i) + ½(6 - 6i)$ d) $4 + 3i + (2 + i) - (3 - 4i) - (4 + 2i)$

Sol. a) $6 - 3i$ b) $13 -12i$ c) $11 - 9i$ d) $–1 + 6i$

2. ¿Qué tipo de gráfica forman los afijos de los números complejos que tienen el mismo argumento?

Sol: forman una recta de pendiente la tangente del argumento de los complejos

3. Calcula los productos:

a) $(4 – 2i)(5 + 3i)$ b) $(3 + 4i)(6 - i)$

c) $(3 + i)(3 - i)$ d) $(5 – 3i)(2 + 3i)$

Sol. a) $26 + 2i$ b) $22 + 21i$ c) 10 d) $19 + 9i$

4. Efectúa los cocientes:

a) $\frac{1+3i}{3-i}$ b) $\frac{2-5i}{4+2i}$ c) $\frac{5-i}{3+4i}$

d) $\frac{5}{2i}$ e) $\frac{i}{2+2i}$ f) $\frac{2i}{-1-i}$

Sol. a) i b) $\frac{-1}{10}-\frac{6}{5}i$ c) $\frac{11}{25}-\frac{23}{25}i$ d) $-\frac{5}{2}i$ e) $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$ f) $-1 - i$

5. Sabiendo que $u = 4 – 3i$, $v = 2i$ y $w = -1 + i$, Calcula:

a) i^{17} b) i^{50} c) i^{301}

d) i^{723} e) i^{1999} f) $\frac{i^3+i^6+i^{11}+i^{13}}{1+i^3}$

Sol a) i b) $–1$ c) i d) $–i$ e) $–i$ f) $–i$

6. Calcula el módulo y el argumento de: $\left(-1+\sqrt{3}i\right)\cdot\left(\sqrt{3}+i\right)\cdot\left(\sqrt{3}-i\right)+i^{31}$

Sol: $m = 255$; $\alpha = 90º$

7. Calcula las siguientes raíces:

a) $\sqrt{3_{\pi/3}}$ b) $-\sqrt{i}$ c) $\sqrt{2-2i}$

d) $\sqrt[4]{-625}$ e) $\sqrt[3]{8i}$ f) $\sqrt[5]{243_{60º}}$

Sol: a) $\sqrt{3_{\pi/6}}$ y $\sqrt{3_{7\pi/6}}$ b) $1_{135º}$ y $1_{315º}$ c) $\left(\sqrt[4]{8}\right)_{157,5º}$ y $\left(\sqrt[4]{8}\right)_{337,5º}$ d) $5_{\pi/4}$, $5_{3\pi/4}$, $5_{5\pi/4}$, $5_{7\pi/4}$

e) $2_{\pi/6}$, $2_{5\pi/6}$, $2_{9\pi/6}$ f) $3_{12º}$, $3_{84º}$, $3_{156º}$, $3_{228º}$, $3_{300º}$

8. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Halla x con la condición de que $(x + 3i)^2$ sea un número imaginario puro

b) Encuentra a con la condición de que $(2 + i)(a - 3i)$ sea un número real.

c) Calcula a + bi para que se verifique que el producto $(a + bi)(2 - i) = 7 - i$.

d) Calcula el valor de a para que el producto $(2 - 5i)(3 + ai)$ sea imaginario puro.

e) Determina el número real x para que el cociente $\dfrac{2+xi}{1-xi}$ sea un número real.

Sol: a) $x = \pm 3$ b) $a = 6$ c) $a + bi = 3 + i$ d) $a = -6/5$ e) $x = 0$

9. Escribe de todas las formas posibles los siguientes complejos

a) $2 + 2i$ b) $1 - i$

c) $-3 + 4i$ d) 2_{225°

Sol: a) (2,2); $2 + 2i$; $2\sqrt{2}_{45^\circ}$; $2\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\,\text{sen}\, 45^\circ)$ b) (1,-1); $1 - i$; $\sqrt{2}_{315^\circ}$; $2\sqrt{2}(\cos 315^\circ + i\,\text{sen}\, 315^\circ)$ c) (-3, 4); $-3 + 4i$; 5_{127°; $5(\cos 127^\circ + i\,\text{sen}\, 127^\circ)$ d) $(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$; $-\sqrt{2} - \sqrt{2}\,i$; 2_{225° ; $2(\cos 225^\circ + i\,\text{sen}\, 225^\circ)$

10. Efectúa, en forma binómica, y representa gráficamente la solución de $\dfrac{13i^4(2-i)}{3-2i}$

Sol: $8 + i$

11. Simplifica las expresiones:

a) $\dfrac{3_{45} \cdot 2_{15}}{6_{30}}$ b) $\dfrac{2_{30} \cdot 3_{60}}{3_{120}\ 1_{300}}$ c) $\dfrac{2_{45} \cdot 2_{15}}{4_{90}}$

Sol: a) 1_{30°; b) 2_{30°; c) 1_{330}

12. Expresa el resultado de las siguientes operaciones en forma polar:

a) $(-4 - 4i)^4$ b) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)^5}{(1-i)^3}$

c) $\dfrac{(i^8 + i^5)}{\sqrt{2}i}$ d) $i^{-73} \cdot \left(\dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3}{2}i\right)$

Sol: a) 1024_{180° b) $8\sqrt{2}_{285^\circ}$ c) 1_{135° d) 3_{240°

13. Resuelve las ecuaciones:

a) $z^6 - 1 = 0$ b) $z^2 + z + 1 = 0$ c) $z^4 + 1 = 0$

d) $z^3 - 6z^2 + 10z - 8 = 0$ e) $z^6 - 64 = 0$

Sol: a) $1_{60^\circ k}$ b) $\dfrac{-1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ c) $1_{45^\circ + 90^\circ k}$ d) 4; $1 + i$; $1 - i$ e) 2_{0°; 2_{60° ; 2_{120°; 2_{180°; 2_{240°; 2_{300°

14. Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Determina los números complejos cuyo cuadrado sea igual a su conjugado.

b) Encuentra los números complejos cuyo conjugado coincide con su inverso.

c) Determina los números complejos cuyo inverso sea igual a su opuesto.

15. Utiliza la fórmula de De Moivre para obtener $\text{sen } 2\alpha$ y $\cos 2\alpha$ en función de $\text{sen } \alpha$ y $\cos \alpha$. De igual forma halla $\text{sen } 4\alpha$ y $\cos 4\alpha$.

16. Determina las siguientes cuestiones:

a) Determina b para que el módulo del cociente $(b + 4i) : (1 + i)$ sea 36.

b) La suma de dos números complejos conjugados es 24 y la suma de sus módulos es 26. ¿De qué números complejos se trata?

c) La suma de dos números complejos es $5 - 3i$. El cociente de ambos es imaginario puro y la parte real del numerador es 4. Halla dichos números.

Sol a) $b = \pm 6$ b) $12 \pm 5i$ c) $4 - i$ y $1 + i$, o bien $4 + i$ y $1 - 4i$.

17. El número $5i$ es una raíz cúbica de un número complejo. Calcula las otras raíces cúbicas y el número complejo.

Sol: $z = -125\, i$; las otras raíces son $\frac{-5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i$ y $\frac{5\sqrt{3}}{2} - \frac{5}{2}i$

18. Halla las coordenadas de los vértices de un hexágono regular, de centro en el origen, sabiendo que uno de sus vértices es el afijo del número complejo 2_{180°

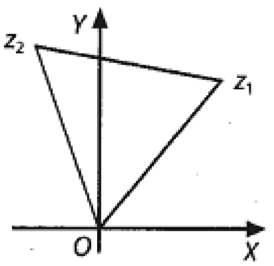
Sol: Los vértices son (2,0); $(1, \sqrt{3})$; $(-1, \sqrt{3})$; (-2,0); $(-1, -\sqrt{3})$; $(1, -\sqrt{3})$

19. Un cuadrado tiene sus vértices por encima del eje real. Si dos de sus vértices consecutivos del cuadrado son $2 + i$ y $5 + 3i$, halla los otros dos vértices.

Sol: $3 + 6i$ y $1 + 5i$

20. Los afijos de los puntos z_1 y z_2 forman un triángulo equilátero con el origen de coordenadas. Calcula z_2 sabiendo que $z_1 = 4 + 5i$.

Sol (-6.33, -0.96)



21. Representa gráficamente los resultados de hallar $\sqrt[3]{1-i}$.
¿Qué figura obtenemos al unir los afijos de las raíces cúbicas obtenidas?

Sol: $\sqrt[6]{2}_{105^\circ}$, $\sqrt[6]{2}_{225^\circ}$ y $\sqrt[6]{2}_{345^\circ}$ Al unir los afijos de las 3 raíces obtenemos un triángulo equilátero.

4: GEOMETRÍA

1. VECTORES

Un vector, $\vec{w}$, es **combinación lineal** de un conjunto de vectores, $\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$, si:

$$\vec{w} = k_1 \cdot \vec{u}_1 + k_2 \cdot \vec{u}_2 + ... + k_n \cdot \vec{u}_n \text{ , con } k_i \in IR$$

Un conjunto de vectores son **linealmente dependientes** si uno cualquiera de ellos se puede expresar como combinación lineal **(no trivial) de los demás.

En particular: $\vec{u}$ y $\vec{v}$ L. Dependientes $\Leftrightarrow$ $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{u} \parallel \vec{v}$

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, ..., \vec{u}_n$ **L. Independientes** $\Leftrightarrow$ $k_1 \cdot \vec{u}_1 + k_2 \cdot \vec{u}_2 + ... + k_n \cdot \vec{u}_n = \vec{o} \Rightarrow k_i = 0$ (la única C.L. de ellos que da el vector nulo es la trivial)

En el plano, dos vectores con distinta dirección forman una **base** porque son L. Indep. (≠dirección) y cualquier otro vector se puede expresar como C.L. de ellos (sólo 2 dimensiones).

Una base es **ortonormal** si todos sus vectores son unitarios (módulo 1) y perpendiculares dos a dos. La base $B = \{\vec{i}, \vec{j}\}$ del plano es una base ortonormal.

Llamamos **coordenadas de un vector** libre respecto de una base, a los coeficientes de la CL que permite expresar ese vector en esa base. Así, si $\vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j} \Rightarrow \vec{v} = (4,3)_B$

Un **sistema de referencia** en el plano: es la terna formada por un punto (origen) y dos vectores de distinta dirección (base). Dado $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$, llamamos **vector de posición** del punto A al vector $\overrightarrow{OA}$. Llamamos **coordenadas** de un punto a las de su vector de posición. Las coordenadas de un vector en función de su origen y extremo son $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$ (extremo menos origen). Coordenadas del **punto medio** y del **baricentro**: $M=(A+B)/2$, $G=(A+B+C)/3$.

Si B es ortonormal y $\vec{v} = (a, b)_B$, el módulo en coordenadas es: $\boxed{|\vec{v}| = \sqrt{a^2 + b^2}}$.

Suma en coordenadas: $(v_1,v_2)+(w_1,w_2) = (v_1+w_1, v_2+w_2)$

Producto por un nº real en coordenadas: $k \cdot (v_1,v_2) = (k \cdot v_1, k \cdot v_2)$

2. PRODUCTO ESCALAR

El **producto escalar** de dos vectores no nulos, $\vec{u}$ y $\vec{v}$, es el nº real: $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})}$. Si uno de los vectores es nulo, el producto escalar es 0.

Geométricamente, el producto escalar de dos vectores es igual al módulo de uno de ellos por el módulo de la proyección del otro sobre él: $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot \left(\pm |\text{proy}\, \vec{v} / \vec{u}|\right)$

PROPIEDADES:

1. Conmutativa: $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (el P.E. es simétrico)
2. Asociativa mixta (homogénea): $a \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v}) = (a \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (a \cdot \vec{v})$
3. Distributiva respecto de la suma: $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
4. $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
5. $\vec{u} \parallel \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = \pm |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|$. Luego: $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \geq 0$

Ángulo formado por dos vectores: $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}$

Expresión analítica del producto escalar: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$

3. ECUACIONES DE LA RECTA EN EL PLANO

1. Si $A=(a_1,a_2)\in r$ y $\vec{v}$ II r, otro punto cualquiera de r, $P=(x,y)$ verificará: $\overrightarrow{AP}=\lambda\vec{v} \Rightarrow \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\lambda\vec{v} \Rightarrow$

   $\boxed{\vec{p}=\vec{a}+\lambda\vec{v}}$ Ecuación vectorial de la recta. En coordenadas: $(x,y) = (a_1,a_2) + \lambda\,(v_1,v_2)$

2. Operando en la ec. vectorial y despejando: $\boxed{\begin{cases} x = a_1+\lambda v_1 \\ y = a_2+\lambda v_2 \end{cases}}$ Ecuaciones paramétricas

3. Despejando e igualando λ: $\boxed{\dfrac{x-a_1}{v_1}=\dfrac{y-a_2}{v_2}}$ Ecuación continua

4. Operando y llamando $A= v_2$, $B= - v_1$, $C=\ldots$, queda: $\boxed{Ax + By + C = 0}$ Ecuación general. El vector $\vec{n}=(A,B)$ es perpendicular a la recta, pues $\vec{n}\cdot\vec{v}=0$

5. Despejando "y" en la ecuación general, y llamando $m=-A/B$, $n=-C/B$: $\boxed{y = mx+n}$ Ec. explícita

6. En la ec. vectorial, y llamando $m = v_2/v_1$ se obtiene: $\boxed{y-a_2 = m(x-a_1)}$ Ec. punto-pendiente

7. Si la recta corta a los ejes en $A=(a,0)$ y en $B=(0,b)$, se verifica: $\boxed{\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1}$ Ec. canónica

8. Si $A\in r$ y $\vec{n}\perp r$, se verifica: $\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$ Ecuación normal. En coordenadas: $\boxed{A(x-a_1)+B(x-a_2)=0}$

4. ÁNGULO DE DOS RECTAS. POSICIÓN RELATIVA

Si r: $y = mx + n$ ó $Ax + By + C = 0$, y s: $y = m'x + n'$ ó $A'x + B'y + C' = 0$, entonces:

$$r \text{ II } s \Leftrightarrow m_r = m_s \Leftrightarrow \vec{v}_r = k\vec{v}_s \Leftrightarrow \vec{n}_r = k\vec{n}_s \Leftrightarrow \frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}$$

Posición relativa:

	Ec. Explícita	Ec. General
Secantes	$m \neq m'$	$\frac{A}{A'}\neq\frac{B}{B'}$
Paralelas	$m = m'$ $n \neq n'$	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}\neq\frac{C}{C'}$
Coincidentes	$m = m'$ $n = n'$	$\frac{A}{A'}=\frac{B}{B'}=\frac{C}{C'}$

El **ángulo** formado por dos rectas no paralelas es el menor de los ángulos que determinan.

Se verifica: $$\cos(r,s)=|\cos(\vec{v}_r,\vec{v}_s)|=|\cos(\vec{n}_r,\vec{n}_s)|=\frac{|\vec{v}_r\cdot\vec{v}_s|}{|\vec{v}_r||\vec{v}_s|}=\ldots$$

Dos rectas son **perpendiculares** si lo son sus vectores del mismo tipo, es decir:

$$r\perp s \Leftrightarrow \vec{v}_r\perp\vec{v}_s \Leftrightarrow \vec{n}_r\perp\vec{n}_s$$

También: $$r\perp s \Leftrightarrow \vec{v}_r\cdot\vec{v}_s=0 \Leftrightarrow \vec{n}_r\cdot\vec{n}_s=0 \Leftrightarrow m_r\cdot m_s=-1$$

5. DISTANCIAS EN EL PLANO

La distancia entre **dos puntos** es el módulo del vector que va de uno a otro, es decir:

$$d(A,B)=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2}$$

La distancia entre **un punto y una recta** es la distancia entre el punto y su proyección ortogonal sobre la recta: $d(A,r)=|\overrightarrow{AA_0}|$. Si $A= (a_1,a_2)$ y $r\equiv Ax + By + C = 0$, se verifica que:

$$d(A,r)=\frac{|A\cdot a_1+B\cdot a_2+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

La distancia entre **dos rectas paralelas** es la distancia de un punto de una de ellas a la otra. Si no son paralelas, la distancia entre ellas es cero.

EJERCICIOS

1.- Los puntos (2, 3), (-5, 7) y (4, -1) son vértices consecutivos de un paralelogramo. Calcula el cuarto vértice.

Sol: (11, -5)

2.- Los puntos (2 , 6) , (5 , 8) y (8 , x) están alineados. Calcula x.

Sol: 10

3.- Expresa el vector (7, 0) como una combinación lineal de los vectores (2, 3) y (-3, 6).

Sol: 2a-b

4.- En una base ortonormal $\vec{a} = (2, 3)$, $\vec{b} = (-1, 4)$ y $\vec{c} = (-6, 4)$. Calcula:

a) $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$ y $|\vec{c}|$

b) $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}$ y $\vec{b}\cdot\vec{c}$

c) Un vector normal a $\vec{b}$

d) cos $(\vec{a}, \vec{b})$ y cos$(\vec{a}, \vec{c})$

Sol: a) $\sqrt{13}$, $\sqrt{17}$, $\sqrt{52}$; b)10, 0, 22; c) (a , 4a); d) $\dfrac{10}{\sqrt{17\cdot 13}}$, 0

5.- Si $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son vectores de módulo unidad, demuestra que entonces $(\vec{a}+\vec{b})$ y $(\vec{a}-\vec{b})$ son perpendiculares.

6.- Sean los vectores $\vec{a} = (6, x)$ y $\vec{b} = (y, 9)$. Calcula x e y si son perpendiculares y el módulo de $\vec{a}$ es 10.

Sol: x = 8, y = -12

7.- Los puntos (1 , 3), (4 , 6) y (x , 8) son vértices consecutivos de un rectángulo. Calcula x.

Sol: 2

8.- Dados los vectores $\vec{a} = (7, 4)$ y $\vec{b} = (4, x)$. Calcula x para que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean:

a) Paralelos

b) Perpendiculares

9.- Calcula la proyección ortogonal de $\vec{a} = (1, 3)$ sobre $\vec{b} = (-2, 7)$

Sol: $\dfrac{19}{\sqrt{53}}$

10.- Calcula el área del triángulo formado por (2 , 3), (4 , 6) y (7 , 4)

Sol: $\dfrac{13}{2}$

11.- Halla las ecuaciones paramétricas y general de las siguientes rectas:

a) Pasa por A (1, -3) y tiene por vector director el (2, -2)

b) Pasa por los puntos A (2, -5) y B (-2,-1)

c) Pasa por A (3, -2) y su pendiente es -2

d) Pasa por el origen y forma 60º con OX

e) Pasa por A (-1, 2) y es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante.

Sol: a) x + y +2 = 0, b) x + y – 3 = 0, c) 2x + y – 4 = 0, d) $\sqrt{3}$ x – y = 0, e) x + y – 1 = 0

12.- Dada la recta $3x + 4y - 6 = 0$ escribe las ecuaciones paramétricas, continua y explícita de la misma.

Sol: $\frac{x-2}{-4} = \frac{y}{3}$

13.- Dada la recta $ax - 3y + 9 = 0$ calcula el valor de a para que:

a) Pase por el punto $(3, 1)$

b) Tenga pendiente -2

c) $(6, -4)$ sea su vector director.

d) Sea paralela a la recta $2x - y = 0$

Sol: a) -2, b) -6, c) -2, d) 6

14.- Dadas las rectas r: $-2x + y + 3 = 0$ y s: $x - 2y - 3 = 0$. Determina la ecuación de la recta que pasa por su punto de corte y cuya pendiente es –3.

Sol: $y = -3x + 2$

15.- Dadas las rectas r: $2x - 3y + 8 = 0$ $\begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = -1 + k\lambda \end{cases}$ calcula k para que r y s sean:

a) Paralelas b) Perpendiculares

Sol: a) $\frac{4}{3}$ b) -3

16.- Calcula la perpendicular y la paralela a las siguientes rectas en el punto que se indica:

a) $2x - 5y + 10 = 0$ en A(0, 0)

b) $y = -x + 3$ en B(-2, -2)

c) $\frac{x-2}{3} = \frac{-y-1}{2}$ en C(2, -1)

Sol: a) $5x + 2y = 0$, $2x - 5y = 0$, b) $x - y = 0$, $x + y + 4 = 0$,
c) $3x - 2y - 4 = 0$, $2x + 3y - 7 = 0$

17.- Estudia la posición relativa de las siguientes rectas:

a) $3x - y + 1 = 0$ y $6x - 2y + 7 = 0$

b) $y = x$ y $(x, y) = (1, 2) + \lambda (3, -3)$

c) $\frac{x+2}{3} = y - 4$ y $\begin{cases} x = 1 - 2\lambda \\ y = 2 - 4\lambda \end{cases}$

Sol: a) paralelas, b) perpendiculares c) secantes no perpendiculares

18.- Calcula la distancia entre la recta r: $3x + 2y - 5 = 0$ a:

a) El origen de coordenadas

b) El punto A $(-5, 2)$

c) La recta $3x + 2y = 0$

Sol: a) $\sqrt{5}$, b) $\frac{14}{\sqrt{5}}$, c) $\sqrt{5}$

19.- Sean los puntos A (2, 2) , B (5, 6) y C (-2, 5). Estudia que tipo de triángulo forman, calcula la altura desde el vértice A y calcula su área.

Sol: Isósceles y rectángulo, su área es $\frac{25}{2}$

20.- Dados los puntos A (-1, 3) y B (3, -1), calcula un punto de la recta r: x + 3y +7 = 0 que equidiste de A y B.

Sol: $\left(\frac{1}{2}, \frac{-5}{2}\right)$

21.- De todas las rectas que pasan por el punto A (-2 , 1) halla las que distan una unidad del origen.

Sol: y = 1, 4x + 3y + 5 = 0

22.- Escribe las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto (-3 , 4) y forman un ángulo de 45º y 135º con el eje OX

Sol: y = x +3, y = -x + 5

23.- A (0 , 0) , B (6 , 0) y C (4 , 4) son los vértices de un triángulo. Calcula:

a) La mediatriz del lado AB

b) La mediana desde el lado BC

c) Las coordenadas del ortocentro

d) Las coordenadas del baricentro

Sol: a) x = 3, b) 2x – 5y = 0, c) (4 , 2), d) $\left(\frac{10}{3}, \frac{4}{3}\right)$

24.- Calcula el área del cuadrado de vértices consecutivos A (2, -6), B (3 , 2) y C (-5 , 1)

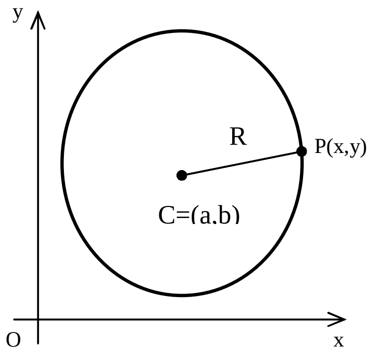
Sol: 65

25.- Los puntos A (3 , 5) y B (7 , 1) son vértices consecutivos del rectángulo ABCD. El vértice C está en la bisectriz del cuarto cuadrante. Halla C y D y calcula el área del rectángulo.

Sol: 32

5: CÓNICAS

1. CIRCUNFERENCIA



La **circunferencia** es el L. G. de los puntos del plano que <u>equidistan</u> de un punto fijo, llamado **centro**. La distancia de un punto cualquiera de la circunferencia al centro se llama **radio**, R.

Ecuaciones:

- Si el centro es O =(0, 0): $\boxed{x^2 + y^2 = R^2}$ <u>Ec. Reducida ó Canónica</u>
- <u>Ec. Centro-Radio:</u> $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$
- <u>Ec. General</u>: $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$

Potencia del punto P respecto de la circunferencia F : $\mathrm{Pot}_F(P) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \pm \overline{PA} \cdot \overline{PB}$

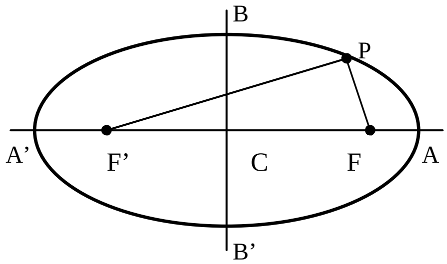
Eligiendo la secante que pasa por el centro de la circunferencia: y llamando d a la distancia de P a dicho centro: $\mathrm{Pot}_F(P) = (d-R)\cdot(d+R) = d^2 - R^2 = (x_o-a)^2 + (y_o-b)^2 - R^2 = x_o^2 + y_o^2 + mx + ny + p$

Posiciones relativas de un punto y una circunferencia:

- Si P es exterior a la circunferencia F (d >R) $\Rightarrow$ $\mathrm{Pot}_F(P) > 0$
- Si P es interior a la circunferencia F (d <R) $\Rightarrow$ $\mathrm{Pot}_F(P) < 0$
- Si P pertenece a la circunferencia F (d =R) $\Rightarrow$ $\mathrm{Pot}_F(P) = 0$

El **eje radical de dos circunferencias** es el L. G. de los puntos del plano que tienen igual potencia respecto de ambas circunferencias: (m-m’) x + (n-n’) y + p-p’= 0.

2. ELIPSE



La **elipse** es el L. G. de los puntos del plano cuya <u>suma de distancias</u> a dos puntos fijos (**focos)**, es constante.

Elementos: **eje focal** (recta $r_{FF'}$) y **distancia focal** (2c); **eje secundario** (mediatriz de FF’); **vértices** (A, A’, B y B’), **eje mayor** (2a) y **eje menor** (2b); **centro** de la elipse, C.

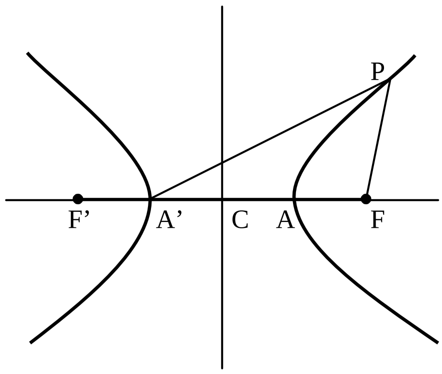
Relación fundamental: $\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$ (siempre: a > b, c)

ECUACIONES:

- Si el centro de la elipse es el origen y el eje focal OX: $\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$ <u>Ec. reducida con orientación OX</u>
- Si el centro es el origen pero el eje focal es OY: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$, Ec. reducida con orientación OY
- Si C=(x_o, y_o) y el eje focal es paralelo a OX: $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, Ec. centro-semiejes con or. OX
- Análogamente, con orientación OY: $\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$, Ec. centro-semiejes con or. OY.
- La ecuación general (or. OX ó OY) es: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, con sig(A) = sig(B)

La **excentricidad** de una elipse es cociente entre la semidistancia focal y el semieje mayor: $\boxed{e = \frac{c}{a}}$ Como 0< c <a , se verifica que 0 < c <1. Cuanto más se aproxime a 1, más achatada está la elipse. Si c = 0 $\Rightarrow$ e = 0, y la elipse es una circunferencia.

3. HIPÉRBOLA



La **hipérbola** es el L. G. de los puntos del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados **focos**, es constante.

Elementos: **eje focal** (pasa por F y F') y **distancia focal** (2c); **eje secundario** (mediatriz de FF'); **vértices** (cortes con el eje focal, A y A'), **eje real** (2a) y **eje imaginario** (2b); **centro** de la elipse, C.

Relación fundamental: $\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$ (siempre: $c > a$, b)

ECUACIONES:

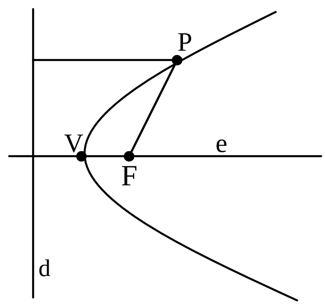
- Si el centro es el origen y el eje focal es OX: $\boxed{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1}$ Ec. reducida con orientación OX
- Si el centro es el origen pero el eje focal es OY: $\dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{x^2}{b^2} = 1$ Ec. reducida con orientación OY
- Si $C=(x_o, y_o)$ y el eje focal es paralelo a OX: $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ Ec. centro-semiejes con or. OX
- Análogamente, con orientación OY: $\dfrac{(y-y_0)^2}{a^2} - \dfrac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$ Ec. centro-semiejes con or. OY.
- La ecuación general (or. OX ó OY) es: $Ax^2 + By^2 + Cx + Dy + E = 0$, con $sig(A) \neq sig(B)$

La **excentricidad** de una hipérbola es cociente entre la semidistancia focal y el semieje real: $\boxed{e = \dfrac{c}{a}}$ Como $0 < a < c$, se verifica que $e > 1$.

Si el centro en el origen y la orientación es OX, las **asíntotas** son: $\boxed{y = \pm\dfrac{b}{a}x}$. Si la orientación es OY serán: $y = \pm\dfrac{a}{b}x$. Y si está desplazada: $(y - y_0) = \pm\dfrac{b}{a}(x - x_0)$ ó ...

La hipérbola se llama **equilátera** cuando $a = b$. Si el centro es el origen y tiene orientación OX, su ecuación será $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \boxed{x^2 - y^2 = a^2}$, sus asíntotas $y = \pm x$ y su excentricidad $e = \sqrt{2}$.

4. PARÁBOLA



La **parábola** es el L.G. de los puntos del plano que equidistan de una recta, llamada **directriz**, y de un punto, llamado **foco**.

Elementos: **parámetro** (distancia del foco a la directriz), **eje** (perpendicular a la directriz pasando por el foco) y **vértice** (corte de la parábola con su eje).

ECUACIONES:

- Si el vértice es el origen, el eje de OX y las ramas están dirigidas hacia la derecha: $\boxed{y^2 = 2p\,x}$ ec. reducida con or. OX^+.
- Si las ramas están hacia la izquierda: $y^2 = -2p\,x \rightarrow$ ec. reducida con or. OX^-
- Si el vértice es $V = (x_o, y_o)$ y el eje es paralelo a OX: $(y-y_o)^2 = \pm\, 2p\,(x-x_o) \rightarrow$ ec. con or. OX
- Si el vértice es $O = (0, 0)$ y el eje es paralelo a OY: $x^2 = \pm 2p\,y \rightarrow$ ec. reducida con or. OY
- Si el vértice es $V = (x_o, y_o)$ y el eje es paralelo a OY: $(x-x_o)^2 = \pm\, 2p\,(y-y_o) \rightarrow$ ec. con or. OY
- La ecuación general (or. OY ó OX) es: $Ax^2 + Bx + Cy + D = 0$, ó $Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$.

EJERCICIOS

1.- Calcula el lugar geométrico de los puntos que equidistan de A (12, 8) y el centro de coordenadas.

Sol: $3x + 2y – 26 = 0$

2.- Calcula el lugar geométrico de los puntos que equidistan de $4x + 3y – 4 = 0$ y de $3x + 4y + 6 = 0$

Sol: $x + y = 10$ $7x + 7y = -2$

3.- Calcula el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta $y = 6$ y del punto A (3, 4)

Sol: $x^2 - 6x + 4y - 11 = 0$

4.- Calcula el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a los ejes de coordenadas es 12.

Sol: $|x| + |y| = 12$

5.- Calcula el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a (0, 3) y a (0, -3) es 10.

Sol: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

6.- Escribe la ecuación del lugar geométrico de los puntos que distan 7 unidades del punto (-3, 4)

Sol. $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 24 = 0$

7.- Calcula el centro y el radio de las siguientes circunferencias:

a) $x^2 + y^2 - 4 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 6x = 0$

c) $x^2 + y^2 - 10y = 0$

d) $x^2 + y^2 - 6x + 6y = 0$

Sol: a) (0 , 0) R=2, b) (3 , 0) R=3 c) (0 , 5) R=5 d) (3 , -3) R=$\sqrt{18}$

8.- Escribe la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a (-11, 2) y (13, 2) es 20.

Sol: $\frac{(x-1)^2}{100} + \frac{(y-2)^2}{64} = 1$

9.- Escribe la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a (4, 0) y a (4, 8) es 10.

Sol: $\frac{(x-4)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{25} = 1$

10.- Calcula los focos de la elipse: $4x^2 + 9y^2 - 16x + 18y - 11 = 0$

Sol: $\left(2 \pm \sqrt{5}, -1\right)$

11.- Calcula los focos, semiejes y excentricidad de las siguientes elipses:

a) $x^2 + 4y^2 - 4 = 0$

b) $9x^2 + y^2 - 9 = 0$

c) $3x^2 + 2y^2 - 6 = 0$

Sol: a) $\left(\pm\sqrt{3}, 0\right)$, b) $\left(0, \pm\sqrt{8}\right)$, c) $(0, \pm 1)$

12.- Escribe la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya resta de distancias a (0, -5) y a (0, 5) es 6.

Sol: $\frac{y^2}{9} + \frac{x^2}{16} = 1$

13.- Escribe la ecuación del lugar geométrico de los puntos cuya resta de distancias a (-3, 5) y a (23, 5) es 24.

Sol: $\frac{(x-10)^2}{144} - \frac{(y-5)^2}{25} = 1$

14.- Calcula los focos y las asíntotas de las siguientes hipérbolas:

a) $9x^2 - 16y^2 - 36x - 108 = 0$

b) $16x^2 - 9y^2 - 64x - 80 = 0$

c) $-16x^2 + 9y^2 + 64x - 208 = 0$

Sol: a) (7 , 0), (-3 , 0), b) (5 , 0), (-1 ,0), c) (2 , 5), (2 , -5)

15.- Calcula focos y asíntotas de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 - 54x - 64y - 127 = 0$

Sol: focos (8 , -2) y (-2 , -2)

16.- Escribe la ecuación de un hipérbola equilátera cuyos focos se encuentran en (4, 4) y (-4, -4)

Sol: $x \cdot y = 16$

17.- Calcula los focos de la hipérbola $x \cdot y = -6$

Sol: $\left(\pm\sqrt{3}, \mp\sqrt{3}\right)$

18.- Escribe el lugar geométrico de los puntos que equidistan de la recta $x = 2$ y del punto (4 , 0).

Sol: $y^2 - 4x + 12 = 0$

19.- Calcula el foco y la directriz de las siguientes parábolas:

a) $y = x^2$

b) $4x^2 - 24x - 4y + 9 = 0$

c) $y^2 + 4y - 4x + 16 = 0$

d) $y^2 + 4y + 4x - 8 = 0$

Sol: a) (-1/2, 0), y = -1/2, b) (1, 3), y = -1, c) (4, -2), x = 2, d) (2, -2), x = 4

20.- Calcula la ecuación de la tangente a la parábola $y = x^2 - 3x + 5$ en $x_0 = 2$

Sol: y = x + 1

21.- Calcula los puntos en los que la circunferencia $x^2 + y^2 = 40$ con los siguientes elementos:

a) $x - 2y + 2 = 0$ b) $9x^2 + 16y^2 = 25$

c) $x^2 - 25y^2 = 25$ d) $x \cdot y = 20$

Sol: a) (3,6 , 5,2) y (10 , 18), b) no hay intersección c) $\left(40 \pm \sqrt{\frac{15}{26}}\ ,\ \sqrt{\frac{15}{26}}\right)$ d) $\left(20 \pm 10\sqrt{2}\ ,\ 20 \pm 10\sqrt{2}\right)$

22.- Escribe la ecuación de la circunferencia tangente a los ejes y que pasa por el punto (-3, 6)

Sol: $x^2 + y^2 + 6x - 6y + 9 = 0$

23.- Calcula la ecuación de la tangente a $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ en el punto (5, 7) y en el punto (-1, 7)

Sol: $4x - 3y + 41 = 0$, $4x + 3y + 25 = 0$

24.- Sea $x \cdot y = 32$. Calcula la secante que pasa por los puntos de OX $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$. Escribe las ecuaciones de las tangentes paralelas a dicha secante.

Sol: $16x + y - 48 = 0$, $16x + y - 32\sqrt{2} = 0$, $16x + y + 32\sqrt{2} = 0$

25.- Calcula las ecuaciones de las tangentes trazadas a $x^2 + y^2 = 25$ desde el punto A(8 , 0).

Sol: $m = \pm\frac{5}{\sqrt{39}}$, los puntos son $\left(\frac{25}{8}, \pm\frac{5\sqrt{39}}{8}\right)$

26.- Escribe la ecuación de la circunferencia que pasa por el origen de coordenadas, el punto (0 , 6) y el punto (4 , 0).

Sol: $x^2 + y^2 - 4x - 6y = 0$

27.- Una parábola cuyo eje de simetría es paralelo al eje de ordenadas pasa por los puntos (2, 0), (6, 0) y (0, 6). Escribe su ecuación.

Sol: $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 6$

6: FUNCIONES

1. DEFINICIÓN. DOMINIO Y RECORRIDO

Si A, B son subconjuntos de $\mathbb{R}$ la función $f: A \longrightarrow B$ se llama función real de variable real.

Dominio de una función es el conjunto original A de la aplicación, es decir, los elementos x que tienen imagen $y = f(x)$: $\text{Dom } f(x) = \{x \,/\, \exists \; y = f(x)\}$.

Restricciones al Dominio Máximo: cocientes, raíces, funciones logarítmicas y algunas funciones trigonométricas.

Así, el Dominio Máximo de una función **polinómica** es $\mathbb{R}$, el D.M. de una función **racional** son los valores de x que no anulan el denominador y el D.M. de una función **irracional** es $\mathbb{R}$ (si el índice es impar) o los valores que hacen el radicando no negativo (si el índice es par). Para calcular el D.M. de una función **definida a trozos** se unen los diferentes subconjuntos para los que está definida.

Recorrido de una función es el conjunto imagen de la aplicación, es decir, el subconjunto de todos los elementos de B que tienen antiimagen $x=f^{-1}(y)$:

$$\text{Rec } f(x) = \{y \,/\, \exists \; x \in \text{Dom } f(x) \text{ con } f(x) = y\}$$

Gráficamente, el dominio y el recorrido se obtienen por proyección sobre los ejes de abscisas y ordenadas respectivamente.

Una **función** se dice que está **definida a trozos** si aplica diferentes fórmulas a distintas partes de su dominio. Para calcular su dominio, se unen los diferentes subconjuntos para los que está definida.

2. CARACTERÍSTICAS DE UNA FUNCIÓN

Signo de una función

Para determinar los intervalos de signo constante es preciso hallar los ceros de la función -posibles cambios de signo- y los puntos donde la función no está definida, y probar en cada intervalo (como se hacía en las inecuaciones).

Monotonía

Una función es **estrictamente creciente** en un intervalo si para todo par de valores del intervalo la imagen del pequeño es menor que la imagen del grande:

$$f(x) \text{ E. Creciente en } [a,b] \Leftrightarrow \forall x,x' \in [a,b], \text{ con } x<x' \Rightarrow f(x) < f(x')$$

Análogamente: $f(x)$ E. Decreciente en $[a,b] \Leftrightarrow \forall x,x' \in [a,b], \text{ con } x<x' \Rightarrow f(x) > f(x')$

$$f(x) \text{ (Simplemente) Creciente en } [a,b] \Leftrightarrow \forall x,x' \in [a,b], \text{ con } x<x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$$

$$f(x) \text{ (Simplemente) Decreciente en } [a,b] \Leftrightarrow \forall x,x' \in [a,b], \text{ con } x<x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$$

$$f(x) \text{ Constante en } [a,b] \Leftrightarrow \forall x,x' \in [a,b] \Rightarrow f(x) = f(x')$$

Acotación

Una f^{on} está **acotada superiormente** si existe un nº real k mayor o igual que todas las imágenes de la f^{on} (k es una **cota superior** de f):

$$f \text{ acotada superiormente } \Leftrightarrow \exists\, k \in IR \ / \ f(x) \le k \quad \forall x \in Dom(f)$$

Análogamente: f **acotada inferiormente** $\Leftrightarrow \exists\, k \in IR \ / \ f(x) \ge k \quad \forall x \in Dom(f)$

Se dice que una función está **acotada**, únicamente cuando lo está superior e inferiormente. En este caso se cumple: $f \text{ acotada} \Leftrightarrow \exists\, k \in IR_+ \ / \ \mathbf{|f(x)| \le k} \quad \forall x \in Dom(f)$. El número k será una cota superior y el nº - k una cota inferior.

Las cotas no son únicas sino infinitas: la cota superior mínima, si existe, se llama **supremo**; y la cota inferior máxima, si existe, **ínfimo**.

Simetrías

- Una f^{on} es **par** si asigna la misma imagen a valores opuestos de la variable independiente:

$$f \text{ par} \Leftrightarrow f(-x) = f(x) \quad \forall x \in Dom(f)$$

La gráfica de la función es **simétrica respecto del eje de ordenadas**.

- Una f^{on} es **impar** si asigna imágenes opuestas a valores opuestos de la var. independiente:

$$f \text{ impar} \Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in Dom(f)$$

La gráfica de la función es **simétrica respecto del origen de coordenadas**.

Periodicidad

Una f^{on} f es periódica si existe $T > 0$ tal que $f(x+T) = f(x)$ para todo $x \in Dom(f)$. Al menor **T** con esa propiedad se le llama **periodo**.

Gráficamente, la función se repite cada cierto intervalo de amplitud T.

3. OPERACIONES

Suma y diferencia: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, donde $Dom\,(f+g) = Dom\, f \cap Dom\, g$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, donde $Dom\,(f-g) = Dom\, f \cap Dom\, g$

Producto por un nº real: $(a\cdot f)(x) = a \cdot f(x)$, donde $Dom(a \cdot .f) = Dom\, f$

Producto: $(f\cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, donde $Dom\,(f\cdot g) = Dom\, f \cap Dom\, g$

Cociente: $(f / g)(x) = f(x) / g(x)$, donde $Dom\,(f / g) = (Dom\, f \cap Dom\, g) - \{x \in Dom\, g \mid g(x)=0\}$

Composición: La función **compuesta** de f y g, $g \circ f$, se obtiene aplicando g a la imágenes de f:

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g[f(x)] = (g \circ f)(x)$$

El dominio es: $Dom(g \circ f) = Dom\, f \cap f^{-1}(Dom\, g) = Dom\, f - \{x \in Dom\, f \ / \ f(x) \notin Dom\, g\}$

Dada un función inyectiva $f(x)$, se denomina **función inversa**, $f^{-1}(x)$, a la que compuesta con ella da la función identidad: $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$

Cálculo de $f^{-1}(x)$: **1º** se hace $f(x) = y$; **2º** se intercambian x e y; **3º** se despeja y en f^{on} de x.

EJERCICIOS

1. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=5x^4+4x^3+3x+2$ b) $f(x)=\dfrac{x-1}{2x+6}+x^2$

c) $f(x)=\sqrt{3x+12}$ d) $f(x)=\sqrt{12-3x}$

2. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+8}}{x^2-4}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x-8}}$

c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x+6}$ d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{25-x^2}$

Sol: a) [-8, -2) ∪ (-2, 2) ∪ (2, ∞), b) (-8, ∞), c) (-∞, 3) ∪ (3, 6) ∪ (6, ∞), d) (-∞, -5) ∪ (-5, -3) ∪ (-3, 5) ∪ (5, ∞)

3. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{2x-12}}$ b) $f(x)=\sqrt{x^2+5x+7}$

c) $f(x)=\sqrt{x^2+3x-10}$ d) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-4x}}$

Sol: a) (-∞, -3] ∪ (6, ∞), b) R, c) (-∞, -5] ∪ [2, ∞), d) (-∞, -2] ∪ (0, 2] ∪ (4, ∞)

4. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\ln(x+5)$ b) $f(x)=\ln\dfrac{x^2}{x-8}$

c) $f(x)=\dfrac{\ln(36-x^2)}{x+2}$ d) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{\ln(x^2-6x+8)}$

Sol: a) (-5, ∞), b) (8, ∞), c) (-6, -2) ∪ (-2, 6), d) (-∞, 2) ∪ (4, ∞)

5. Averigua el recorrido de las siguientes funciones ayudándote de su representación gráfica:

a) $f(x)=-x^2+3x-2$ b) $f(x)=\sqrt{x+4}$

c) $f(x)=\left|x^2+x-6\right|$ d) $f(x)=\begin{cases}|x+1| & \text{si } x\le 3\\ x^2-7 & \text{si } x>3\end{cases}$

Sol: a) (- ∞ ,1/4], b) [0, ∞), c) [0, ∞), d) [0, ∞)

6. Estudia el signo de las siguientes funciones:

a) $f(x)=-x^3+2x^2+3x$ b) $f(x)=\dfrac{-3}{x^2-1}$

Sol: a) es + en (-∞, 1)∪(0, 3) y – en (-1, 0)∪(3, ∞);b) es + en(-1, 1)y - en (-∞, -1) ∪(1, ∞)

7. Representa las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^2+2x-3$ b) $f(x)=x^2-4$

c) $f(x)=-2x^2+2x+12$ d) $f(x)=-x^2-1$

8. Representa el valor absoluto de las funciones del ejercicio 6.

9. Representa las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} x+2 & x\le 3 \\ 5 & x>3 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} -x+4 & x<2 \\ x^2-2 & x\ge 2 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} -x^2+4 & x\le 2 \\ x^2-6x+8 & x>2 \end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x\le 0 \\ 0 & x>0 \end{cases}$

10. Representa las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} 3-2x & x\le 2 \\ -1 & 2<x<3 \\ \dfrac{x-5}{2} & 3\le x \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x}{3} & x\le 0 \\ \sqrt{x} & 0<x<4 \\ 2 & 4\le x \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x+2 & x\le -1 \\ -x^2+2x & -1<x<1 \\ \dfrac{1}{x} & 1\le x \end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} \left|9-x^2\right| & x\le 2 \\ x^2+1 & x>2 \end{cases}$

11. Calcula el dominio y el recorrido de las funciones que has representado en los ejercicios 9 y 10.

12. Estudia la simetría de las funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ b) $f(x)=x^3+x-1$

c) $f(x)=|x|+x^2$

Sol: a) y b) no son pares ni impares, c) es par

13. Sean $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ y $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ calcula:

a) $(f+g)(x)$ b) $(f\cdot g)(x)$ c) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$ d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

Sol: a) $\dfrac{x^2-x+2}{x^2-1}$, b) $\dfrac{x-1}{x^2-1}$, c) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$, d) $\dfrac{(x-1)^2}{x+1}$

14. Calcula el dominio de las cuatro funciones que has obtenido en el ejercicio anterior.

Sol: a) R-{-1, 1}, b) R-{-1, 1}, c) R-{1}, d) R-{-1}

15. Sean $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ y $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ calcula:

a) $f\circ f(x)$ b) $g\circ g(x)$ c) $g\circ f(x)$ d) $f\circ g(x)$

Sol: a) $\dfrac{x-1}{2-x}$, b) $-\dfrac{1}{x}$, c) $\dfrac{2-x}{x}$, d) $-\dfrac{x+1}{2}$

16. Dadas las funciones $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x+5$ y $h(x)=x^2$ escribe la función $t(x)=\frac{1}{x^2}+5$ como resultado de una composición de las tres.

17. Expresa $f(x)=\sqrt{3x^2+2}$ como composición de tres funciones.

18. Estudia si las siguientes funciones son inyectivas:

a) $f(x)=4x-6$ b) $f(x)=2x^2-6x+4$

c) $f(x)=\frac{x+2}{2x-4}$ d) $f(x)=\ln\left(\frac{2x+8}{5}\right)$

Sol: a) sí, b) no, c) sí, d) sí

19. Calcula la inversa por la composición de las siguientes funciones:

a) $f(x)=4x-6$ b) $f(x)=\frac{x+2}{2x-4}$

c) $f(x)=\ln\left(\frac{2x+8}{5}\right)$ d) $f(x)=e^{2x+1}$

Sol: a) $\frac{x+6}{4}$, b) $-\frac{4x+2}{1-2x}$, c) $\frac{5e^x-8}{2}$, d) $\frac{\ln x-1}{2}$

20. Comprueba los resultados obtenidos en el ejercicio 19.

21. Define las siguientes funciones:

a) El volumen de un cono de altura 4 en función de su generatriz.

b) El área total de un cilindro de radio 3 en función de su altura.

c) El volumen de un cono inscrito en una esfera de radio 4 en función de su altura.

d) El volumen de un cilindro de área lateral 20 en función de su radio.

Sol: a) $\frac{4\pi(g^2-16)}{3}$, b) $6\pi(3+h)$, c) $\frac{\pi(8h^2-h^3)}{3}$, d) 10 r

22. Un rectángulo mide 8 dm de largo y 4 dm de ancho. De cada esquina se recorta un cuadrado de lado x con el fin de hacer una caja sin tapa. Calcula el volumen de la caja en función de x.

Sol: $V(x)= 4x^3-24x^2+32x$

23. ¿Son iguales las funciones $f(x)=x+2$ y $g(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$? ¿Por qué? Represéntalas gráficamente.

7: LÍMITE Y CONTINUIDAD

1. LÍMITES DE SUCESIONES

Sucesión **convergente**: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\, n_o \in IN^* / n > n_o \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

Sucesión **divergente**: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \iff \forall\, k \in IR\ \exists\, n_o \in IN^* / n > n_o \Rightarrow a_n > k$ (ó $a_n < k$)

Las sucesiones que no son convergentes ni divergentes se llaman **oscilantes**.

OPERACIONES con ∞, 0 y $a \in IR^*$ (regla de los signos como en el álgebra real):

	SUMA	PRODUCTO	COCIENTE	POTENCIA
CERO	$0+0=0$ $a+0=a$	$0\cdot 0=0$ $a\cdot 0=0$	$\frac{0}{a}=0$ $\frac{0}{0}=$ **?**	$0^{+a}=0$ $a^0=1$ $0^0=$ **?**
INFINITO	$\infty+\infty=\infty$ $\infty+a=\infty$ $\infty-\infty=$ **?**	$a\cdot\infty=\infty$ $\infty\cdot\infty=\infty$	$\frac{\infty}{a}=\infty$ $\frac{\infty}{\infty}=$ **?**	$(+\infty)^{+a}=+\infty$; $(+\infty)^{+\infty}=+\infty$ $(+a)^{+\infty}=\begin{cases}+\infty & \text{si } a>1\\ 0 & \text{si } 0<a<1\end{cases}$ $1^{\infty}=$ **?**
CERO E INFINITO	$0+\infty=\infty$	$0\cdot\infty=$ **?**	$\frac{a}{\infty}=0$, $\frac{a}{0}=\infty$ $\frac{0}{\infty}=0$, $\frac{\infty}{0}=\infty$	$0^{+\infty}=0$ $\infty^0=$ **?**

INDETERMINACIONES: $\boxed{\infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0^o, \infty^o, 1^\infty}$.

Sucesión **polinómica**: el límite es $+\infty$ ó $-\infty$ (sucesión divergente).

Sucesión **racional** (Indet.∞/∞): se dividen N y D por la mayor potencia de n que aparezca (en el denominador). Será <u>divergente</u> cuando gr.N > gr.D; tiene <u>límite cero</u> si gr.N < gr.D; y tiene por límite el <u>cociente de los coeficientes</u> principales cuando gr.N = gr.D

Sucesión **irracional**: si el término general es la **raíz de un polinomio**, la sucesión es divergente. Si el término general es un **cociente de radicales** polinómicos, se procede como en el caso de cociente de polinomios. Si el término general es la **suma o diferencia de dos radicales** polinómicos y aparece la indeterminación $\infty-\infty$, se resuelve: 1º comparando los grados de los términos principales; 2º comparando los coeficientes de dichos términos principales (cuando sean del mismo grado); 3º multiplicando y dividiendo por la expresión irracional conjugada.

Sucesión **potencial-exponencial**: si aparece la indeterminación 1^∞ se resuelve por el nº e.

2. LÍMITES DE FUNCIONES

Límite finito de una función **en el infinito**: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$ ó $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$. En ambos casos diremos que la recta $y = L$ es una **asíntota horizontal** de la función.

Límite infinito en el infinito: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x) = +\infty$, …En los cuatro casos que se presentan no hay asíntota horizontal. Podría tener **asíntota oblicua** (rama asintótica) o no (rama parabólica).

- Para calcular los **límites en el infinito** se procede igual que en el caso de las sucesiones.

Límite finito en un punto finito: $\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, \delta>0\ /\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$.

Límite infinito en un punto finito: $\text{Lím}_{x\to a} f(x) = +\infty$ ó $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$. En ambos casos diremos que la recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la función.

- Para calcular los **límites en un punto finito** se sustituye **x por a** en la expresión de $f(x)$ y se opera. Si al operar da <u>cero en el denominador</u>, los límites laterales son infinitos y hay que mirarles el signo: podría no haber límite en el sentido general y, en todo caso, la recta $x = a$ es una **asíntota vertical**. Si da <u>cero en el numerador y en el denominador</u>, se dividen ambos entre $x-a$, y se repite el proceso. Si es una <u>función definida a trozos</u>, en los puntos de corte de la definición hay que calcular los límites laterales y comprobar si coinciden.

3. PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON LÍMITES

$\lim k = k$	$\lim (k\cdot f) = k \cdot \lim f$	$\lim (f \pm g) = \lim f \pm \lim g$
$\lim (f\cdot g) = \lim f \cdot \lim g$	$\lim\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{\lim f}{\lim g}$, si $\lim g \neq 0$	$\lim e^{f} = e^{\lim f}$
$\lim f^{g} = (\lim f)^{\lim g}$	$\lim (\log f) = \log (\lim f)$	$\lim (\text{sen } f) = \text{sen } (\lim f)$

4. CONTINUIDAD

$\boxed{f(x) \text{ es continua en } a \iff \lim_{x\to a} f(x) = f(a)}$ Luego debe cumplir:

1. Existe $f(a)$.
2. Existe $\lim_{x\to a} f(x)$
3. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$

La **suma**, **diferencia** y **producto** de funciones continuas es otra función continua. Consecuentemente, las funciones polinómicas son continuas en IR.

El **cociente** de dos funciones continuas es una función continua allí donde no se anule el denominador. Consecuentemente, las funciones racionales son continuas en su dominio.

Las funciones **compuestas** son continuas en su dominio.

Las funciones exponencial, logarítmica, seno y coseno son continuas.

Clasificación de discontinuidades:

DISCONTINUIDADES	EVITABLE (FINITA)	$L^-, L^+ \in \mathbb{R}$ $L^- = L^+$
	DE SALTO (FINITO)	$L^-, L^+ \in \mathbb{R}$ $L^- \neq L^+$
	ASINTÓTICA	L^- ó/y $L^+ = \pm\infty$

[En la tabla: $L^- = \lim_{x\to a^-} f(x)$ y $L^+ = \lim_{x\to a^+} f(x)$]

EJERCICIOS

1. Escribe el término general de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \left\{5, \frac{13}{2}, 8, \frac{19}{2}, 11, \frac{25}{2}, ...\right\}$

b) $a_n = \{192, 96, 48, 24, 12....\}$

c) $a_n = \left\{4, \frac{7}{4}, \frac{12}{7}, \frac{19}{10}, \frac{28}{13}, \frac{39}{17}...\right\}$

d) $a_n = \{0, 7, -26, 63, -124...\}$

Sol: a) $\frac{3n+7}{2}$, b) $\frac{3}{2^{n-7}}$, c) $\frac{n^2+3}{3n-2}$, d) $(n^3-1)(-1)^n$

2. Calcula cuántos términos de la sucesión $a_n = \frac{3n+1}{n+4}$ quedan fuera de un entorno centrado en su límite y de radio $0,011$.

Sol: 996

3. Calcula cuántos términos de la sucesión $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ están fuera de un entorno centrado en cero y de radio $0,005$.

Sol: 15

4. Dadas las sucesiones $a_n = \frac{3n^3+2n}{n^3+1}$, $b_n = \frac{5n^2+2}{5-n^2}$ y $c_n = \frac{2n^2+1}{1-n}$ calcula:

a) $\lim(a_n + c_n)$ b) $\lim(a_n \cdot b_n)$ c) $\lim\left(\frac{b_n}{c_n}\right)$ d) $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$

Sol: a) -∞, b) -15, c) 0, d) -3/5

5. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\frac{5n^2+2n}{n^2-3}$

b) $\lim\frac{\sqrt{n^3+4n^2}}{n^2+3}$

c) $\lim\frac{\sqrt{5n^2+2n}}{n^2-3}$

d) $\lim\frac{\sqrt{16n^2+7}}{\sqrt[3]{8n^3+3n+5}}$

Sol: a) 5, b) 0, c) 0, d) 2

6. Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \sqrt{4n^2+2} - \sqrt{4n^2-8n-4}$

b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n^2} - \sqrt{2n^2+3n}}$

c) $a_n = \frac{\sqrt{6n^2+3} - (6n+2)}{n}$

d) $a_n = \frac{6\sqrt{n^2+1} - \sqrt{36n^2+n}}{3n}$

Sol: a) 2, b) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, c) -∞, d) 0

7. Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{3n+2}$ b) $a_n = \left(\frac{n^2+2n+3}{n^2-3}\right)^{2n^2+1}$

c) $a_n = \left(\frac{\sqrt{4n^2+3}}{2n-3}\right)^{2n-1}$ d) $a_n = \left(\frac{2n+1}{3n-3}\right)^{5n+2}$

Sol: a) e^6, b) ∞, c) e^{-3}, d) 0

8. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^2-8x+3\right)$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^3-4x^2+5\right)$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3-2x)^2}{-4x^2+2}$ d) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(3-5x)^2}{-9x^2+10}$

Sol: a) ∞, b) -∞, c) -1, d) -25/9

9. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{x^2+3}{3-2x^2}\right)^{-x^2}$ b) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+2}{5x-1}\right)^{-x+3}$

c) $\lim\limits_{x\to\infty}2^{\frac{3x+1}{x^2+2}}$ d) $\lim\limits_{x\to-\infty}2^{\frac{3x+1}{x^2+2}}$

Sol: a) 0, b) 0, c) 1, d) 1

10. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}$ b) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-1}{x^3-1}$

c) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ d) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3}$

Sol: a) 1/2, b) 4/3, c) 1/2, d) 2

11. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to-2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}$ b) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{2}{x+1}\right)$

c) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2-x}\right)$ d) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{x-1}{3x-2}-\frac{1}{x}\right)$

Sol: a) 0, b) ±∞, c) 2, d) ±∞

12. Calcula por la derecha y por la izquierda los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{x-2}{x^2-1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to2}\frac{3x+2}{x^2-4x+4}$

c) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{2x^2-x}$ d) $\lim\limits_{x\to-1}\frac{2x+3}{x^3+x^2}$

Sol: a) +∞ por la izquierda y -∞ por la derecha, b) ∞ por la izquierda y por la derecha, c) -∞ por la derecha y ∞ por la izquierda, d) ∞ por la derecha y -∞ por la izquierda

13. Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & x\le 2 \\ \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} & x>2 \end{cases}$, calcula:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

Sol: a) 0, b) no existe, c) no existe, d) 1

14. Halla el valor de a para que exista $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ si $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x\le -1 \\ x+a & x>-1 \end{cases}$

Sol: a = 4

15. Representa una función que cumpla que:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=3$ y $f(x) > 3\, f(x)>3$ cuando $x > 0$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=3$ y $f(x) < 3$ cuando $x > 0$

c) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\infty$ y $f(x) > 0$ para todo x

d) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=4$

16. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{4}{x+3}$ b) $f(x)=\dfrac{6x^2}{x^2+3}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-9}$ d) $f(x)=\dfrac{4x^2}{x^2-2x-4}$

Sol: a) y = 0, x = 3, b) y = 6, c) y = 1, x = -3, x = 3 d) y = 4, , $x=1-\sqrt{5}$, $x=1+\sqrt{5}$

17. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=e^{3x+4}$ b) $f(x)=e^{x^2+1}$

c) $f(x)=\ln(2x+6)$ d) $f(x)=\ln(x^2-8x+15)$

Sol: a) y = 0 cuando x $\to$ -∞, b) no tiene, c) x = -3, d) x = 3, x = 5

18. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & x\le 1 \\ x & x>1 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & x\le 0 \\ \dfrac{3}{x+1} & x>0 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x} & x<0 \\ x^2+1 & x\ge 0 \end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & x<1 \\ 2x & x\ge 1 \end{cases}$

Sol: a) Continua en R – {0}, b) Continua en todo R, c) Continua en todo R, d) Continua en todo R

19. Calcula el valor de A para que $f(x)$ sea continua.

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{A}{x^2+x+1} & x\le 1 \\ 2x+A & x>1 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+1 & x\le 1 \\ x^2+Ax+2 & x>1 \end{cases}$

Sol: a) A = -3, b) A = -1

20. Estudia el comportamiento de las siguientes funciones en los puntos en los que no están definidas.

a) $f(x)=\dfrac{2x}{1-x}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$

c) $f(x)=\dfrac{x}{9-x^2}$ d) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-4x+3}$

Sol: a) en 1 por la izquierda ∞ y por la derecha -∞, b) en 0 por la izquierda ∞ y por la derecha, -∞
c) en –3 por la izda -∞ y por la dcha ∞, d) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\dfrac{1}{2}$ y el 1 por la izda -∞ y por la dcha ∞

21. Calcula:

a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{-x}{(x-1)^2}}$ b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1-2x}{2-2x}\right)^{3x+4}$ c) $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{x+6}{x^2-16}-\dfrac{x+1}{x^2-4x}\right)$

Sol: a) 0; b) $e\sqrt{e}$; c) 1/32

22. Estudia la continuidad de $f(x)=e^{\frac{1}{x-2}}$

Sol: Contínua en R-{2}. En x =2 discontinuidad asintótica

23. Averigua los límites laterales de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x+2|}{2x+4} & \text{si } x\le 1\\[2mm] \dfrac{x-2}{x^2-3x} & \text{s } x>1\end{cases}$ en $x=-2$, $x=1$ y $x=3$

b) $f(x)=\dfrac{|3x-1|}{3x^2+5x-2}$ en $x=-2$ y $x=1/3$

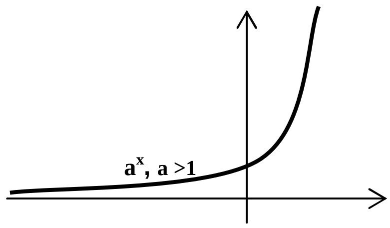
Sol: a) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=-1/2$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=1/2$; $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=1/2$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1/2$; $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\infty$;
b) $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{x\to 1/3^-} f(x)=-3/7$, $\lim\limits_{x\to 1/3^+} f(x)=3/7$

8: FUNCIONES EXPONENCIAL, LOGARÍTMICA Y TRIGONOMÉTRICAS

1. FUNCIÓN EXPONENCIAL

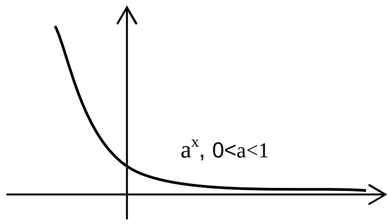
Dado $a \in IR_+^* - \{1\}$, se denomina función exponencial de base "**a**" a la aplicación de IR en IR que asigna a^x a todo nº real x:

$$f: IR \to IR$$
$$x \to a^x$$



Propiedades comunes ($a \in IR_+^* - \{1\}$):

1. Es siempre positiva, $a^x > 0$.
2. Es continua en todo IR.
3. Pasa por (0, 1), pues $a^0 = 1$.
4. Está acotada inferiormente pero no superiormente.



Propiedades de $f(x) = a^x$ **para a >1**:

1. Es E. Creciente en todo su dominio.
2. $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$ y $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0 \Rightarrow OX$ es A. Horizontal por izqda.

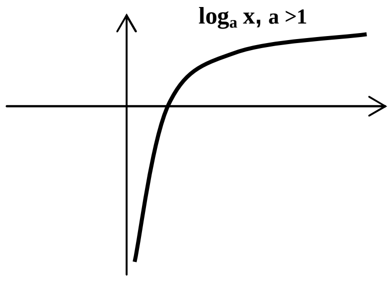
Propiedades de $f(x) = a^x$ **para 0<a<1:**

1. Es E. Decreciente en todo su dominio.
2. $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$ y $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty \Rightarrow OX$ es A. Horizontal por drcha.

2. FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Se llama **f^on^ logarítmica** de base a a la f^on^ recíproca de $f(x) = a^x$, y se escribe $f(x) = \log_a x$:

$$f: IR_+^* \longrightarrow IR$$
$$x = a^y \longrightarrow y = \log_a x$$

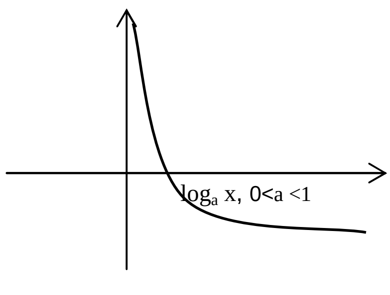


Propiedades comunes ($a \in IR_+^* - \{1\}$):

1. Es continua en IR_+^*.
2. Pasa por (1, 0), pues $a^o = 1 \Rightarrow \log_a 1 = 0$.
3. No está acotada ni superior ni inferiormente.
4. Su gráfica es simétrica de la de exponencial.

Propiedades de $f(x) = \log_a x$ **para a >1**:

1. Es E. Creciente en todo su dominio.
2. Si $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < 0$. Si $x > 1 \Rightarrow \log_a x > 0$.
3. $\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$, $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty \Rightarrow OY$ es asíntota vertical por la izquierda.



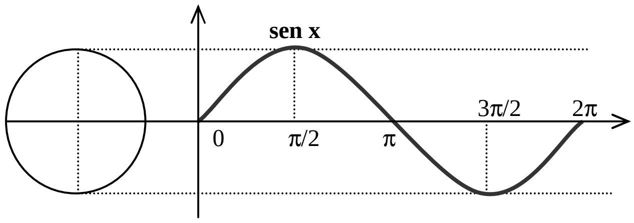
Propiedades de $f(x) = \log_a x$ **para 0<a<1**:

1. Es E. Decreciente en todo su dominio.
2. Si $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x > 0$. Si $x > 1 \Rightarrow \log_a x < 0$.
3. $\lim_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x \to 0^+} \log_a x = +\infty \Rightarrow OY$ es asíntota vertical por la izquierda.

3. FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Se llama **función seno** a la aplicación de IR en IR que asigna a todo nº real, x, el valor sen x:

$$\text{sen}: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \text{sen } x$$

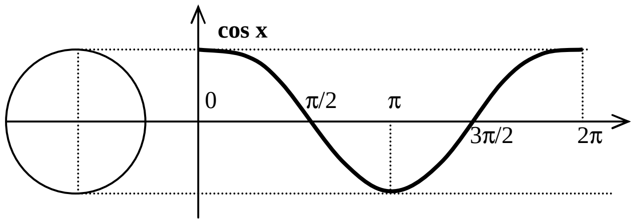


Propiedades:

1. Dom (sen x) = IR y Rec (sen x) = [-1, 1]
2. Es continua y acotada: $|\text{sen } x| \le 1$
3. Es periódica de periodo 2π.
4. Es impar: sen (–x) = - sen x, por lo que es simétrica respecto del origen.

Se llama **función coseno** a la aplicación de IR en IR que asigna a todo nº real, x, el valor cos x:

$$\cos: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \cos x$$



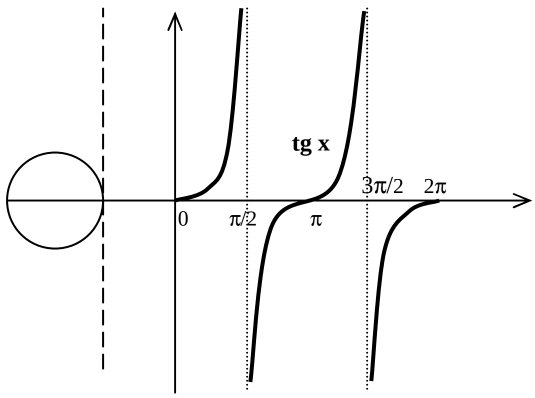
Propiedades:

1. Dom (cos x) = IR y Rec (cos x) = [-1, 1]
2. Es continua y acotada: $|\cos x| \le 1$
3. Es periódica de periodo 2π
4. Es par: cos (–x) = cos x, por lo que es simétrica respecto de OY.

La **función tangente** se define como la función cociente $\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$.

Propiedades:

1. Dom (tg x) = { x∈IR / cos x ≠ 0 }, Rec (tg x) = IR
2. No está acotada y presenta discontinuidad asintótica en todos los puntos de la forma $x=(2k+1)\,\pi/2$, con k entero.
3. Es periódica de periodo π: $\text{tg}\, x = \text{tg}\,(x + \pi)$.
4. Es impar: tg (-x) = - tg x, por lo que es simétrica respecto del origen.
5. Es E. Creciente en su dominio.



EJERCICIOS

FUNCIÓN EXPONENCIAL

1. Representa gráficamente las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Señala sus propiedades. Distingue entre las que son comunes y las que las diferencian.

2. Representa, haciendo uso de la calculadora, la función $y = e^x$.

3. Representa e indica las propiedades de las funciones $y = 3^x$, $y = 3^{-x}$.

4. Considerando la función $f(x) = 5^x$, calcula:
   a) f(-2) b) f(1/2) c) f($\log_5 3$)

   Sol: a) 1/25, b) $\sqrt{5}$, c) 3.

5. A partir de la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, representa:
   a) $f_1(x) = 2^x + 1$ b) $f_2(x) = 2^x - 1$ c) $f_3(x) = 2^{x+1}$ d) $f_4(x) = 2^{x-1}$.

6. De una función de la forma $f(x) = a^x + b$ sabemos que f(0) = 4 y que f(1) = 5. Calcula a y b.

   Sol: a = 2; b = 3

7. A partir de la gráfica de la función $f(x) = 2^x$, representa: $g(x) = \left|2^x\right|$ y $h(x) = 2^{|x|}$.

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

8. Representa gráficamente las funciones $f(x) = \log_2(x)$ y $g(x) = \log_{1/2}(x)$. Señala sus propiedades. Distingue entre las que son comunes y las que las diferencian.

9. Representa, haciendo uso de la calculadora, la función $y = \ln x$.

10. En la función $f(x) = \log_a(x)$, calcula a sabiendo que:
    a) f(1/125) = 3. b) f(1/8) = -2.

    Sol: a) a = 1/5. b) a = $2\sqrt{2}$.

11. A partir de la gráfica de la función $f(x) = \log x$ representa:
    a) $f_1(x) = 1 + \log(x)$ b) $f_2(x) = -1 + \log(x)$ c) $f_3(x) = \log(x+1)$ d) $f_4(x) = \log(x-1)$

12. A partir de la gráfica de la función $f(x) = \log_2(x)$, representa: $g(x) = \left|\log_2(x)\right|$ y $h(x) = \log_2|x|$.

13. Representa en el mismo sistema de referencia las funciones $f(x) = 2^x$ y $g(x) = \log_2(x)$. ¿Qué se observa? ¿En qué punto se cortan?

Sol: Sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante. Son funciones inversas la una de la otra. No se cortan en ningún punto.

14. Calcula los dominios de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \log(x+1)$ b) $f(x) = \log(5+x^2)$ c) $f(x) = \log(9-x^2)$,

d) $f(x) = \log(x^2 - 2x - 8)$ e) $f(x) = \log\left(\dfrac{x^2-1}{x-4}\right)$.

Sol: a) (-1, ∞), b) R, c) (-3,3), d) (- ∞,-2) ∪ (4, ∞), e) (-1, 1) ∪ (4, ∞)

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

15. Representa gráficamente y señala las propiedades de las funciones trigonométricas: y = sen x, y = cos x e y = tg x.

16. A partir de la gráfica de la función f(x) = cos x, representa las funciones:

a) $f_1(x) = \cos(2x)$ b) $f_2(x) = 2\cdot\cos x$ c) $f_3(x) = 2\cdot\cos(2x)$

17. Indica cuál es el periodo y cuál el recorrido de cada una de esas funciones.

Sol: a) Periodo π. Recorrido [-1, 1], b) Periodo 2π. Recorrido [-2, 2], c) Periodo π. Recorrido [-2, 2]

18. Tomando como referencia la gráfica de la función f(x) = sen x, representa:

a) g(x) = 2 + sen x b) h(x) = - 2 + sen x

Indica su periodo y su recorrido.

Sol: a) Periodo 2π, Recorrido [1, 3], b) Periodo 2π, Recorrido [-3, -1]

19. Indica cuáles son las asíntotas verticales de la función $f(x) = tg(x)$ y calcula:

a) $\lim_{x\to(\pi/2)^-} tg(x)$ b) $\lim_{x\to(\pi/2)^+} tg(x)$.

Sol: Asíntotas x = (2k+1)π/2 con k∈ Z; a) ∞, b) -∞

20. Representa la función f(x) = |cos x| y deduce cuáles son su dominio, su recorrido y su periodo.

Sol: Dominio ℝ. Recorrido [0, 1]. Periodo π.

9: DERIVADAS

1. TASA DE VARIACIÓN Y DERIVADA

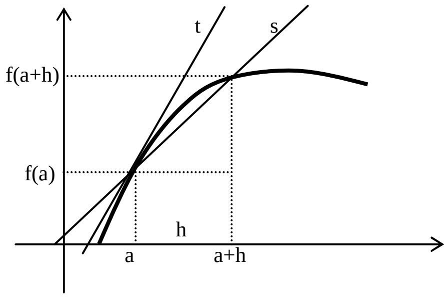
Tasa de variación media en [a, b]: $\text{TVM}[a,b] = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

Tasa de variación instantánea en a: $\text{TVI}(a) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{b \to a} \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Interpretación gráfica:

$$\text{pte } s = \text{tg } \beta = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \text{TVM } [a, a+h]$$

$$\text{pte } t = \text{tg } \alpha = \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)} = D\,f(a) = \frac{df}{dx}(a)$$



La pendiente de la recta tangente en un punto (la derivada) mide la monotonía de la función en ese punto:

- Si la pte. es positiva, $f'(a) = \text{tg } \alpha > 0 \Rightarrow$ f es **E. Creciente** en (a, f(a))
- Si la pte. es negativa, $f'(a) = \text{tg } \alpha < 0 \Rightarrow$ f es **E. Decreciente** en (a, f(a))

Si una función tiene un máximo o un mínimo relativo en x = a, la recta tangente en dicho punto deberá ser horizontal: f derivable en x = a y (a, f(a)) extremo relativo $\Rightarrow f'(a) = 0$

Los puntos de una función que verifican **$f'(x) = 0$** se denominan **puntos singulares**.

2. FUNCIÓN DERIVADA

Llamamos **función derivada de f** a la función $f': D' \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longrightarrow f'(x)$

Se designa por $y' = f'(x) = D\,f(x) = df/dx$

Derivadas de las funciones elementales:

$F^{\underline{on}}$ Elemental	Derivación	Cambiando **x** por **f** y multiplicando por **f '** obtenemos la "**forma compuesta**"
Constante	$k' = 0$	
Identidad	$x' = 1$	
Potencial	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(f^n)' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
Irracional	$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$\left(\sqrt[n]{f}\right)' = \dfrac{f'}{n \cdot \sqrt[n]{f^{n-1}}}$
Exponencial	$(e^x)' = e^x$, $(a^x)' = a^x \ln a$	$(a^f)' = a^f \ln a \, f'$
Logarítmica	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a} = \dfrac{\log_a e}{x}$	$(\ln f)' = \dfrac{f'}{f}$, $(\log_a f)' = \dfrac{f'}{f \cdot \ln a}$
Potencial-Exponencial	$(x^x)' = x^x (1+\ln x)$	$(f^g)' = g \cdot f^{g-1} \cdot f' + f^g \cdot \ln f \cdot g'$
Trigonométricas	$(\text{sen } x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\text{sen } x$ $(\text{tg } x)' = 1/\cos^2 x = 1 + \text{tg}^2 x$ $(\text{arc sen } x)' = 1/\sqrt{1-x^2}$ $(\text{arc cos } x)' = -1/\sqrt{1-x^2}$ $(\text{arc tg } x)' = -1/(1+x^2)$	$(\text{sen } f)' = f' \cos x$ $(\cos f)' = -f' \text{ sen } x$ $(\text{tg } f)' = f'/\cos^2 f = f'(1 + \text{tg}^2 f)$ $(\text{arc sen } f)' = f'/\sqrt{1-f^2}$ $(\text{arc cos } f)' = -f'/\sqrt{1-f^2}$ $(\text{arc tg } f)' = -f'/(1+f^2)$

Derivada de las operaciones con funciones:

Operación	Derivación		
Suma	(f + g)’ = f ’ + g ’		
Producto por k	(k · f)’ = k · f ’		
Producto	(f · g)’ = f ’ · g + f · g’	(f · g · h)’ = f ’ · g · h + f · g’ · h + f · g · h’	
Cociente	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	F^on Inversa	$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$
Composición	$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$	F^on Recíproca	$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

3. APLICACIONES DE LA DERIVADA

A. ECUACIÓN DE LA RECTA TANGENTE A UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

El valor de la pendiente de la recta tangente a f(x) en x = a es f ’(a). Por tanto, la ecuación punto pendiente de la **recta tangente** a f(x) en x = a será: $\boxed{y - f(a) = f'(a)\cdot(x-a)}$

B. INTERVALOS DE MONOTONÍA Y EXTREMOS RELATIVOS DE UNA FUNCIÓN

- Cálculo de los **intervalos de monotonía** de una función:
  1. Se hallan los **puntos críticos** : { $x \in \mathbb{R}$ / f ’(x) = 0 ó $\nexists$ f ’(x) }.
  2. Se comprueba el **signo de f ’** en cada intervalo resultante y se aplica el Tª de Monotonía.

- Los **extremos relativos** de una función derivable están entre los puntos de tangente horizontal (habrá extremo en los que cambie la monotonía). Luego para calcularlos:
  1. Se hallan los **puntos singulares**: { $x \in \mathbb{R}$ / f ’(x) = 0 }
  2. Se comprueba el **signo de f ’** en los intervalos de monotonía que limitan los puntos singulares. Si el signo cambia se trata de un extremo.

C. REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

- FUNCIONES POLINÓMICAS

Las funciones polinómicas son continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$. Luego se pueden dibujar de un solo trazo (sin asíntotas verticales) y son suaves (sin picos).

Para representarlas es suficiente con estudiar su comportamiento en el infinito (sus límites cuando $x \to \pm\infty$) , y calcular sus cortes con los ejes coordenados y sus puntos singulares.

- FUNCIONES RACIONALES

Las funciones racionales son continuas y derivables en su dominio (los reales que no anulan el denominador). En los puntos que anulan el denominador presentan asíntotas verticales.

Para representarlas es imprescindible calcular su dominio, estudiar sus discontinuidades, conocer sus ramas infinitas y calcular sus puntos de corte con los ejes y sus puntos singulares.

EJERCICIOS

DEFINICIÓN DE DERIVADA

1. Halla la tasa de variación media en los siguientes casos:

a) $f(x) = x^2 + 5$ en [-2,5] b) $f(x) = \ln(x)$ en [1,7]

Sol: a) 3; b) $\frac{\ln 7}{6}$

2. Calcula, usando la definición, la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = 3x - 4$ en x =1 b) $f(x) = x^2$ en x = - 1

c) $f(x) = \frac{1}{x}$ en x = 6 d) $f(x) = x^2 + 2x$ en x = 3

Sol:a) f´(1) =3 , b) f´(-1) =-2 , c) f´(6) =-1/36 , d) f´(3) =8

3. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a las funciones del ejercicio anterior en los puntos indicados. Haz una representación gráfica de cada caso.

Sol: a) y = 3x-4; b) y = -2x- 1; c) y = -1/36 x +1/3; d) y = 8x -9

4. Calcula, aplicando la definición, la función derivada de cada una de las funciones siguientes:

a) $f(x) = 7$ b) $f(x) = \frac{5}{x}$ c) $f(x) = \sqrt{x}$ d) $f(x) = 3x^2 - x$

Sol: a) f´(x) = 0, b) f´(x) = - 5/x^2; c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, d) f´(x) = 6x-1

CÁLCULO DE DERIVADAS

5. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = 2x^3 - 7x + 8$ b) $y = -3x^2 + 6x$ c) $y = (x-3)^5$ d) $y = \frac{5}{x} + \frac{2}{x^4}$

e) $y = \sqrt[5]{x} + 7\sqrt[4]{x^3} - \frac{\sqrt{x}}{3}$ f) $y = 4\sqrt{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ g) $y = 3 - \frac{1}{x^4} + 5\sqrt[4]{x}$ h) $y = \frac{7x}{1+\sqrt{x}}$

i) $y = \frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$ j) $y = x^5 e^x$ k) $y = \frac{e^x}{\operatorname{sen} x}$ l) $y = x^3 \cdot \cos x$

m) $y = \frac{\ln x}{4x}$ n) $y = x \cdot e^x + x^4 \cdot \ln x$ o) $y = 6^x - \operatorname{tg} x$ p) $y = \log x \cdot \cos x$

q) $y = 2^4 + \frac{2^x}{x}$ r) $y = \frac{5e^x - 2x}{\sqrt[3]{x}}$ s) $y = \frac{x + e^x}{x - e^x}$ t) $y = \frac{1 - x^3}{1 + x^3}$

6. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) y = 5 sen(x) b) y = sen(5x) c) $y = \operatorname{sen}(x^5)$ d) $y = \operatorname{sen}^5(x)$

Sol: a) 5 cos(x), b) 5 cos(5x), c) $5x^4 \cos(x^5)$, d) 5 $\operatorname{sen}^4(x)$ cos(x)

7. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - 4x + 1$ b) $y = \frac{2}{x^2} + 3\text{senx}$ c) $y = 3 - x\sqrt{x}$ d) $y = 3^x + 2^x$

e) $y = \frac{e^x}{x}$ f) $y = \sqrt{2^x + 1}$ g) $y = \ln(x+e^x)$ h) $y = \frac{x}{\ln x}$

i) $y = \ln(\text{sen}\sqrt{x})$ j) $y = (x+\cos x)^3$

Sol: a) $3x^2 - 4$, b) $-4/x^3 + 3\cos x$, c) $-3\sqrt{x}/2$, d) $3^x \ln 3 + 2^x\ln 2$, e) $e^x(x+1)/x^2$, f) $2^{x-1}\ln 2/\sqrt{(2x+1)}$, g) $(1+e^x)/(x+e^x)$, h) $(\ln x - 1)/\ln^2 x$, i) $\cos\sqrt{x})/(2\sqrt{x}\cdot \text{sen}\sqrt{x})$, j) $3(x+\cos x)^2(1-\text{sen } x)$

8. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = \cos(5x^2 + 3x - 2)$ b) $y = e^{5x^2+x}$ c) $y = \ln(4x^2 + \text{senx})$

d) $y = \text{tg}(5x + \frac{1}{x} + 3)$ e) $y = \arccos(5x^2 - \sqrt{x})$ f) $y = \cos^5(x)$

g) $y = \frac{3+\cos x}{5+e^x}$ h) $y = (3\sqrt{x} + x)\text{sen}(5x+2)$ i) $y = \frac{3x+1}{4-\cos x}$

j) $y = \text{tgx}\log_3(4x+1)$ k) $y = \cot g(7e^x + 4)$ l) $y = \text{arctgx} - e^{x^2+x}$

Sol: a) $-\text{sen}(5x^2 + 3x - 2)(10x+3)$, b) $e^{5x^2+x}(10x+1)$, c) $\frac{8x+\cos x}{4x^2+\text{senx}}$, d) $\frac{5-\frac{1}{x^2}}{\cos^2\left(5x+\frac{1}{x}+3\right)}$,

e) $-\frac{10x - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-(5x^2-\sqrt{x})^2}}$, f) $-5\cos^4(x)\text{sen}(x)$, g) $\frac{-\text{senx}(5+e^x) - (3+\cos x)e^x}{(5+e^x)^2}$,

h) $\left(\frac{3}{2\sqrt{x}}+1\right)\text{sen}(5x+2) + 5(3\sqrt{x}+x)\cos(5x+2)$, i) $\frac{3(4-\cos x)-(3x+1)\text{senx}}{(4-\cos x)^2}$,

j) $\frac{1}{\cos^2 x}\log_3(4x+1) + \text{tgx}\frac{4}{(4x+1)\ln 3}$, k) $\frac{-7e^x}{\text{sen}^2(7e^x+4)}$, l) $\frac{1}{1+x^2} - e^{x^2+x}(2x+1)$

9. Halla la derivada de las siguientes funciones aplicando previamente las propiedades de los logaritmos:

a) $y = \ln\left(x^3 - 2\right)^{x+5}$ b) $y = \ln\left(\frac{\text{senx}}{3x+9}\right)^5$ c) $y = \ln\left(\sqrt{x}\text{arcsenx}\right)$

Sol: a) $y = (x+5)\ln\left(x^3-2\right)$, $y' = \ln\left(x^3-2\right) + (x+5)\frac{3x^2}{x^3-2}$; b) $y = 5\left(\ln\left(\text{senx}\right) - \ln(x+3) - \ln 3\right)$,

$y' = 5\left(\frac{\cos x}{\text{senx}} - \frac{1}{x+3}\right)$; c) $y = \frac{1}{2}\ln\left(x\right) + \ln\left(\text{arcsenx}\right)$, $y' = \frac{1}{2x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\,\text{arcsenx}}$

10. Halla la derivada de las siguientes funciones tomando previamente logaritmos neperianos:

a) $y = x^{\sqrt{x}}$ b) $y = (\text{senx})^x$ c) $y = (x^2+1)^{\text{tgx}}$

Sol: a) $y' = x^{\sqrt{x}}\left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x}\right)$, b) $y' = (\text{senx})^x\left(\ln(\text{senx}) + \frac{x\cos x}{\text{senx}}\right)$, c) $y' = (x^2+1)^{\text{tgx}}\left(\frac{\ln(x^2+1)}{\cos^2 x} + \frac{2x\text{tgx}}{x^2+1}\right)$

11. Dadas las funciones: $f(x) = 3x^2 - x$, $g(x) = \ln x$, $h(x) = \cos x$, calcula las derivadas primera, segunda y tercera de cada una de ellas.

Sol: $f'(x) = 6x-1$, $f''(x) = 6$, $f'''(x) = 0$; $g'(x) = 1/x$, $g''(x) = -1/x^2$, $g'''(x) = 2/x^3$; $h'(x) = -\text{sen}\ x$, $h''(x) = -\cos x$, $h'''(x) = \text{sen}\ x$

12. Dadas las funciones: $f(x) = 3x^2 - x$, $g(x) = \ln x$, $h(x) = \cos x$ del ejercicio anterior, calcula:

a) $f''(-2)$ b) $g'''(-1)$ c) $h'''(0)$

Sol: a) 6; b) -2; c) 0

ESTUDIO DE LA DERIVABILIDAD DE UNA FUNCIÓN

13. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x|$ b) $f(x) = |5x-3|$ c) $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{si } x < 0 \\ -x+2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} \ln x & \text{si } x \geq 1 \\ x-1 & \text{si } x < 1 \end{cases}$

Sol: a) Derivable en R-{0}; b) Derivable en R-{3/5}; c) Derivable en R-{0}; d) Derivable en R

APLICACIONES DE LA DERIVADA

14. Halla la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)= e^x$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Sol: $y = x+1$

15. ¿En qué puntos corta a los ejes de coordenadas la recta tangente a la función $y = x^2 - 4x + 2$ en el punto de abscisa $x = 1$?

Sol: (0,1), (1/2,0)

16. ¿En qué punto la recta tangente a la función $y = \dfrac{x^2-4}{x^2+4}$ es horizontal?

Sol: (0,1)

17. ¿En qué punto la recta tangente a la función $y = 2x^2 - 3x$ es paralela a la bisectriz del primer cuadrante?

Sol: (1,-1)

18. Halla el área del triángulo que determina la recta tangente a la función $f(x) = 4-x^2$ en el punto de abscisa $x = 1$ con los ejes cartesianos.

Sol: 25/4

19. Halla en qué punto la recta de ecuación $y = 9x + 21$ es tangente a la función $f(x) = x^3-3x+5$.

Sol: (-2,3)

20. Halla en qué puntos la recta tangente a la función $f(x) = x^3-3x+5$ es paralela a la recta de ecuación $y = 9x + 21$.

Sol: En el punto (-2,3) la tangente es $y = 9x + 21$; en (2,7) la tangente es $y = 9x-11$, paralela a la recta dada.

21. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $f(x) = x^3 - 2x + 1$ que sean paralelas a la recta de ecuación $y = x + 8$.

Sol: $y = x-1$; $y = x+3$

22. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones y calcula sus extremos relativos.

a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 4$ b) $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ c) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 1$

d) $f(x) = \frac{e^x}{x}$ e) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ f) $f(x) = \ln(x+5)$

g) $f(x) = x \ln x$ h) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ i) $f(x) = x - \sqrt{x+1}$

Sol: a) Decrec. en (-1,2), creciente en el resto. Máximo rel. en x = -1, mínimo rel. en x = 2. b) Decrec. en todo su dominio. c) Decrec. en (-2,0), creciente en el resto. Máximo relativo en x = -2, mínimo rel. en x = 0.d) Creciente en $(1, \infty)$, decrec. en $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$.Mínimo rel. en x = 1. e) Creciente en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$. Decrec. en $(0, 1) \cup (1, \infty)$. Máximo rel. en x = 0. f) Creciente en $(-5, \infty)$. g) Decrec. en (0,1/e). Creciente en $(1/e, \infty)$. Mínimo relativo en x =1/e. h) Decrec. en $(-\infty,0)$. Creciente en $(0, \infty)$. Mínimo rel. en x = 0. i) Decrec. en [-1,-3/4). Creciente en $(-3/4, \infty)$. Mínimo rel. en x = -3/4.

23. Halla una función polinómica de segundo grado sabiendo que corta al eje OY en el punto (0,5), que en el punto x = 4 la recta tangente es horizontal, y en el punto x = 5 la recta tangente es paralela a la recta de ecuación $y = 2x+9$.

Sol: $f(x) = x^2 - 8x + 5$

24. Halla los parámetros a y b sabiendo que la función $f(x) = ax^3 + bx + 5$ presenta un extremo relativo en el punto (1,3).

Sol: a = 1, b = -3

25. Halla los parámetros a y b sabiendo que la recta tangente a la función $f(x) = \frac{a}{x} + b$ en el punto x = -1 es la recta de ecuación $y = -2x-1$.

Sol: a = 2, b = 3

26. Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 1$, calcula a, b y c sabiendo que f(x) tiene un máximo en el punto (1,5) y que en x = 0 la recta tangente tiene pendiente 9.

Sol: a = 1, b = -6, c =9

27. Determina los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} ax^2+1 & \text{si } x < 2 \\ x+b & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ sea derivable en todo su dominio.

Sol: Dom(f) = R. Para a = ¼, b = 0 la función es derivable en R

28. Determina los valores de a y b para que la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 1 \\ ax+b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ sea derivable en todo su dominio.

Sol: Dom(f) = R-{0}. Para a = -1, b = 2 la función es derivable en R-{0}

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

29. A partir del estudio del dominio, los puntos de corte con los ejes, las asíntotas, la monotonía y los extremos relativos, representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 3x + 2$ b) $f(x) = - x^3 + 4x$ c) $f(x) = x^4 - 4x^2$

d) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$ e) $f(x) = \frac{2}{x+3}$ f) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

g) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ h) $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$ i) $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$

j) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x+2}$ j) $f(x) = 2x + \frac{1}{x}$ k) $f(x) = 2 + \frac{1}{x-1}$

ÍNDICE