MANUAL DE RECUPERACIÓN

PARA

MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CCSS 1

Juan Carlos Jiménez
Manuela Valle
Porfirio Pérez
Jesús Gil
Alfredo Jiménez

1: NÚMEROS REALES

INTERVALOS

Intervalo abierto de extremos a y b: $(a,b) = \{ x \in IR \ / \ a < x < b \}$ o————o

Intervalo cerrado de extremos a y b: $[a, b] = \{ x \in IR \ / \ a \le x \le b \}$ •————•

Intervalo semiabierto …: $[a, b) = \{ x \in IR \ / \ a \le x < b \}$ •————o

Semirrectas: $(-\infty, b) = \{ x \in IR \ / \ x < a \}$ ←————o; $(a, -\infty) = \{ x \in IR \ / \ x > a \}$ o————→

$(-\infty, b] = \{ x \in IR \ / \ x \le a \}$ ←————•; $(a, -\infty) = \{ x \in IR \ / \ x \ge a \}$ •————→

Entornos: $E(x_o, r) = (x_o - r, x_o + r)$; $E^*(x_o, r) = E(x_o, r) - \{x_o\} = (x_0 - r, x_0) \cup (x_0, x_0 + r)$.

VALOR ABSOLUTO

Si $x \in IR$, $\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \ge 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}}$

- Propiedades: 1. $|a| \ge 0$ 2. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ 3. $|a+b| \le |a|+|b|$

- Si $|x| < a,\ a > 0 \Rightarrow -a < x < a$; si $|x| \ge a,\ a > 0 \Rightarrow x \ge a$ ó $x \le -a$
- Si $a \ne b \Rightarrow |a-b| = |b-a|$

POTENCIAS Y RAÍCES

Si $a \in IR$ y $n \in IN$, se define la potencia a^n como: $\begin{cases} a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \cdot a}^{n-\text{veces}}, & \text{si } a > 1 \\ a^1 = a \\ a^0 = 1, & \text{si } a \ne 0 \end{cases}$ Además: $\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$

La raíz enésima de un nº a es otro nº b cuya potencia enésima es igual que a. Se representa con la expresión $\sqrt[n]{a}$: $\boxed{\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a}$.

POTENCIAS	RAÍCES
1. Producto de potencias con la misma base $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$	Prop. Fundam.: $\sqrt[n]{a^s} = \sqrt[n \cdot p]{a^{s \cdot p}}$
1'. Cociente de potencias con la misma base $a^p : a^q = a^{p-q}$	
2. Producto de potencias con el mismo exponente $a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p$	2. Producto de raíces con el mismo índice $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
2'. Cociente de potencias con el mismo exponente $a^p : b^p = (a : b)^p$	2'. Cociente de raíces con el mismo índice $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a : b}$
3. Potencia de una potencia $(a^p)^q = a^{p \cdot q}$	3. Raíz de un raíz $\sqrt[p]{\sqrt[q]{a}} = \sqrt[p \cdot q]{a}$
Potencia de una raíz: $\left(\sqrt[p]{a}\right)^q = \sqrt[p]{a^q}$	

LOGARITMOS

Si $a, x > 0$ con $a \ne 1$, se llama <u>logaritmo en base a de x</u> al exponente, y, al que hay que elevar la base, a, para obtener x: $\boxed{y = \log_a x \iff a^y = x}$.

Logaritmos destacados: $\log_a 1 = 0$; $\log_a a = 1$; $\log_a a^n = n$

Operaciones: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$ $\log_a (x/y) = \log_a x - \log_a y$ $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$

Cambio de base: $\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$; en general: $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$

EJERCICIOS

1. Indica si son verdaderas o falsas las siguientes afirmaciones:
   a) Todos los números decimales son racionales
   b) Todos los números decimales son reales
   c) La suma de dos racionales es racional
   d) La suma de dos irracionales es irracional

2. Clasifica estos números según sean naturales, enteros, racionales o reales:

$$\sqrt[3]{27}+2,\quad 3,\overset{\frown}{5},\quad \frac{\pi}{3},\quad -\frac{14}{2},\quad 2{,}0100100\ldots,\quad 9\sqrt{2,\overset{\frown}{7}},\quad \pi^2,\quad \sqrt{\frac{1{,}21}{25}},\quad \frac{21}{3}$$

3. Efectúa :

a) $3{,}4\overset{\frown}{5}+2{,}46=$

b) $3,\overset{\frown}{4}+2,\overset{\frown}{5}-3{,}4\overset{\frown}{2}=$

c) $\sqrt{0{,}18\overset{\frown}{7}}=$

d) $\sqrt{\dfrac{1}{0{,}00\overset{\frown}{1}}}=$

Sol: a) $5{,}91\overset{\frown}{5}$, b) $2{,}5\overset{\frown}{7}$, c) $0{,}4\overset{\frown}{3}$, d) 30

4. Expresa en intervalos y con desigualdades los siguientes conjuntos:
   a) Reales comprendidos entre 2 y 7, incluido el 7
   b) Reales menores que –3
   c) Reales mayores o iguales que –3
   d) Reales que no son menores que –2 ni mayores que 10

5. Sean : $A=\{x\in R/-3\le x\le 8\}$, $B=\{x\in R/x>-1\}$ y $C=\{x\in R/-1\le x<1\}$. Calcula:

a) $A\cup B\cup C$

b) $A\cap B\cap C$

c) $(A\cap B)\cup C$

d) $(R\cap B)\cap(R\cup A)$

Sol: a) [-3, ∞), b) (-1, 1), c) [-1, 8], d) B

6. Escribe los intervalos a los que pertenece x si:

a) $-3\le x$ y $x\le 10$

b) $x>10$ o $x\ge 15$

c) $x>-\dfrac{3}{4}$ y $3>x$

d) $-0{,}02\le x<0$

7. Escribe los intervalos a los que pertenece x si:

a) $-3\le \dfrac{x}{4}+1\le 7$

b) $4>-x+3>0$

c) $-2<\dfrac{x-4}{2}\le 10$

d) $\dfrac{7}{4}>\dfrac{2-3x}{2}>1$

Sol: a) [-16, 24], b) (-1, 3), c) (0, 24], d) $\left(\dfrac{-1}{2},0\right)$

8. Escribe los intervalos a los que pertenece x:

a) $|x-5| < 7$ b) $|2x+6| \leq 4$

c) $\left|\frac{x+2}{2}-1\right| > 3$ d) $|x-3| + |x-6| \geq 6$

Sol: a) (-2, 12), b) [-5, -1], c) $(-\infty, -6) \cup (6, \infty)$, d) $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{15}{2}, \infty\right)$

9. Racionaliza:

a) $\frac{4}{\sqrt[3]{4}}$ b) $\frac{2}{2+\sqrt{2}}$

c) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+1}$ d) $\frac{4}{2+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$

Sol: a) $2\sqrt[3]{2}$, b) $2-\sqrt{2}$, c) $\frac{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2}$, d) $\frac{8+2\sqrt{5}+6\sqrt{3}-4\sqrt{15}}{11}$

10. Simplifica las expresiones siguientes:

a) $\sqrt[3]{125}\cdot\sqrt[3]{5^6}$ b) $\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{x^4}}\cdot\sqrt[4]{x^{10}}$

Sol: a) 125, b) $x\sqrt[6]{x^5}$

11. Calcula y simplifica:

a) $8\sqrt{8}+5\sqrt{2}+4\sqrt{20}-12\sqrt{5}$ b) $\sqrt{1+x}-2\sqrt{9+9x}-3\sqrt{25+25x}$

c) $5\sqrt{27}+3\sqrt{12}-5\sqrt{75}$ d) $\left(\sqrt{7}-\sqrt{18}\right)^2+3\sqrt{56}$

Sol: a) $21\sqrt{2}-4\sqrt{5}$, b) $-20\sqrt{1+x}$, c) $-4\sqrt{3}$, d) 25

12. Opera y simplifica:

a) $\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}-\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{\sqrt{\sqrt{5}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{5}+1}}{\sqrt{\sqrt{27}-3}\cdot\sqrt{\sqrt{27}+3}}$

Sol: a) $-3\sqrt{2}$, b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$

13. Calcula x en las siguientes ecuaciones:

a) $\lg_x 9 = 2$ b) $\log(x+1) = 2$

c) $\lg_3 x^2 = -3$ d) $\lg_{\frac{1}{2}}\frac{1}{8} = x$

14. Calcula x en las siguientes ecuaciones:

a) $\lg_{x+1} 81 = 4$ b) $\ln\frac{1}{e} = x$

c) $\ln\sqrt{e} = x$ d) $\ln x^3 = 6$

15. Sabiendo que $\lg_3 x = 1{,}1$ calcula:

a) $\lg_3 \sqrt[3]{\dfrac{x}{3}}$ b) $\lg_3 9x^2$

c) $\lg_9 \sqrt{x}$ d) $\lg_{\frac{1}{3}} x^2$

Sol: a) -1/3, b) 4,2, c) 0,275, d) -2,2

16. Sabiendo que log A = -2,2, log B = 0,8 y log C=2,4, calcula:

a) $\log \dfrac{A^2B^3}{C^4}$ b) $\log \sqrt{\dfrac{AC}{B^3}}$

c) $\log \sqrt[3]{10A}$ d) $\log \dfrac{\sqrt[3]{A}\sqrt{B}}{\sqrt{1000C}}$

Sol: a) -11,6; b) -1,1; c) -0,4; d) -1,03

17. Expresa en forma de un solo logaritmo:

a) $\dfrac{1}{2}\log a - 3\log b - \log c$ b) $3\ln a - \ln b + 6\ln c$

c) $\dfrac{\log a - \log b}{3}$ d) $\dfrac{\ln 27}{\ln \frac{1}{3}}$

18. Expresa estos números en notación científica:

a) $0{,}00356 \cdot 10^{12}$ b) $69800000 \cdot 10^{-4}$

c) $0{,}4 \cdot 10^{-2}$ d) $18{,}3 \cdot 10^{-1}$

19. Expresa el resultado en notación científica:

a) $3{,}2 \cdot 10^{-6} + 28{,}8 \cdot 10^{-7}$ b) $\dfrac{28{,}8 \cdot 10^{-7}}{3{,}2 \cdot 10^{-6}}$

c) $3 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}1 \cdot 10^{-2} \cdot 5 \cdot 10^{6}$ d) $\sqrt{12{,}1 \cdot 10^{7} \cdot 0{,}09}$

Sol: a) $6{,}08 \cdot 10^{-6}$, b) $9 \cdot 10^{-1}$, c) 1,65, d) $3{,}3 \cdot 10^{3}$

20. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{5{,}83 \cdot 10^{6} + 2{,}45 \cdot 10^{5}}{3 \cdot 10^{-5}}$ b) $\dfrac{\left(3{,}2 \cdot 10^{5} - 1{,}5 \cdot 10^{2}\right) \cdot \left(2 \cdot 10^{-5}\right)}{4{,}2 \cdot 10^{-8}}$

Sol: a) $2{,}025 \cdot 10^{11}$, b) $1{,}523 \cdot 10^{7}$

2: ECUACIONES Y SISTEMAS

POLINOMIOS

Si **r** es **raíz** de $P(x)$, según el **Tª del resto** la división de $P(x)$ entre $x-r$ es exacta, y existirá $C(x)$ tal que: $\mathbf{P(x) = (x-r) \cdot C(x)}$. Tomado una raíz de $C(x)$ -que lo será también de $P(x)$- y repitiendo el proceso, podemos factorizar el polinomio $P(x)$ mediante **divisiones sucesivas** entre sus raíces:

$$\boxed{P(x) = a_n \cdot (x-r_1) \cdot (x-r_2) \cdot (x-r_3) \cdot \ldots}$$

ECUACIONES

Una ecuación es **polinómica** si puede reducirse a la forma $P(x)=0$. Para resolver una ecuación de grado superior a 2, en general, es preciso factorizar $P(x)$. Esto se puede evitar a veces con un cambio de variable, como en las ecuaciones bicuadradas.

Una ecuación es **racional** si aparecen fracciones algebraicas. Pueden reducirse a la forma $P(x) / Q(x)=0$. Se resuelve directamente reduciendo a común denominador y eliminando los denominadores. **Nota**: las raíces del denominador no son soluciones de la ecuación.

Una ecuación es **irracional** si la incógnita aparece bajo el signo radical. Para resolverlas se aísla el término radical y se elevan los dos miembros a la potencia del índice. **Nota**: es preciso comprobar las soluciones.

Una ecuación es **exponencial** si la incógnita se encuentra en el exponente. Para resolverla, se expresan los dos miembros como <u>potencias de la misma base</u>, pues: $a^x = a^y \Rightarrow x = y$. Si no es posible, se realiza un <u>cambio de variable</u> o se aplican <u>logaritmos</u>.

Una ecuación es **logarítmica** si la incógnita se encuentra dentro de una expresión logarítmica. Para resolverla, se expresan los dos miembros como logaritmos de la misma base, pues: $\log_a x = \log_a y \Rightarrow x = y$. Al no ser el dominio del logaritmo todo $\mathbb{R}$, conviene comprobar las soluciones.

INECUACIONES

Una inecuación es **polinómica** si puede reducirse a una de las formas $P(x)<0$, $P(x)>0$, …

- Si el polinomio es de grado 1, la inecuación se dice lineal o de primer grado. Se resuelve despejando la incógnita directamente, teniendo en cuenta las propiedades de las desigualdades.

- Si el polinomio es de grado dos o superior, para resolverla es necesario factorizar el polinomio; las raíces de éste determinan $n+1$ intervalos abiertos en la recta, de los cuales son solución los que cumplen la desigualdad (basta probarlo con un valor del interior del intervalo). Si la desigualdad no es estricta, las raíces del polinomio también serán soluciones de la ecuación.

Una inecuación es **racional** si puede reducirse a una de las formas $P(x) / Q(x) < 0$, …

Su resolución equivale a la de la inecuación polinómica $P(x) \cdot Q(x) < 0$, …, salvo que las raíces de $Q(x)$ nunca pueden ser solución de la inecuación racional.

SISTEMAS DE ECUACIONES

Un sistema **lineal** formado por más de 2 ecuaciones es recomendable resolver por el **Método de Gauss** (reducción-sustitución): se convierte el sistema original en un **sistema escalonado** (aplicando reducción), y se sustituye en el orden contrario al de reducción.

Si el sistema es **no lineal**, no hay un procedimiento estándar para resolverlo. Aunque si una ecuación sí es lineal, siempre se puede aplicar sustitución.

SISTEMAS DE INECUACIONES

Para resolver un sistema de inecuaciones **lineales con una incógnita** se resuelve cada inecuación por separado y se cortan las soluciones.

Un sistema de inecuaciones **lineales con dos incógnitas** se resuelve gráficamente como la región del plano intersección de los semiplanos correspondientes a cada inecuación.

EJERCICIOS

1. Calcula el cociente y el resto en las siguientes divisiones:

a) $(x^4+3x^3-2x^2+3x+2)\div(x^2-2x+3)$ b) $(x^5-3x^3+2x+1)\div(x^2-x+1)$

c) $(x^4-3x)\div(x^2+1)$

Sol: a) R(x) = -2x-13, b) R(x) = x+5, c) R(x) = -3x+1

2. Calcula el cociente y el resto en las siguientes divisiones:

a) $(3x^3+2x^2-x+2)\div(x+1)$ b) $(3x^4-2)\div(x-3)$

c) $(x^5-x^3)\div(x-1)$

Sol: a) R = 2, b) R = 241, c) R = 0

3. Calcula *a* y *b* en los siguientes polinomios si:

a) (x^4-ax^2+b) es divisible entre $(x-2)$ y entre $(x-1)$

b) (x^3+ax^2+bx-3) es divisible por $(x+3)$ y tiene resto 3 entre $(x+2)$

c) $(x^{21}+a)$ es divisible por $(x+1)$

Sol: a) a = 5, b = 4, b) a = 3, b = -1, c) a = 1

4. Escribe un polinomio que cumpla las siguientes condiciones:

a) Es de grado cuatro y es divisible por $(x+2)$ y por x^2

b) Es de grado cuatro y no tiene divisores de grado uno

c) Es de grado tres y su única raíz real es 3

5. Descompón en factores primos los siguientes polinomios:

a) $P(x)=x^3+3x^2-4x-12$ b) $P(x)=2x^3+3x^2-8x-12$

c) $P(x)=x^6+x^4-2x^2$

6. Descompón las siguientes expresiones:

a) x^4-16a^4 b) $25x^6-30x^3a+9a^2$

c) $ax^2-bx^2+by^2-ay^2$

Sol: a) $(x-2a)(x+2a)(x^2+4a^2)$, b) $(5x^3-3a)^2$, c) (x+y)(x-y)(a-b)

7. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{x+2}{x^2+2x+1}+\dfrac{x-3}{x^2-1}$ b) $\dfrac{a-b}{b^2-a^2}+\dfrac{2}{a+b}$

c) $\dfrac{2x^2+2x}{x^3+x^2}-\dfrac{x^3+2x^2}{x^5+2x^4}-\dfrac{3}{x}$

Sol: a) $\dfrac{2x^2-x-5}{(x+1)^2\cdot(x-1)}$, b) $\dfrac{1}{a+b}$, c) $\dfrac{-1-x}{x^2}$

8. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\dfrac{x+2}{x^3-x^2}\cdot\dfrac{x^2-x}{x-2}$ b) $\dfrac{9a^2-1}{a+1}\div\dfrac{3a-1}{a^2-1}$

c) $\dfrac{4}{x+2}\div\left(1-\dfrac{x+5}{x+2}\cdot\dfrac{x-3}{x+2}\right)$

Sol: a) $\dfrac{x+2}{x(x+2)}$, b) $3a^2-2a-1$, c) $\dfrac{4x+8}{2x+19}$

9. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\left(\frac{x^2}{x-1}+\frac{x^2}{x+1}\right)\cdot\frac{x^2-1}{2x^3}$ b) $\left(\frac{2x+1}{x+1}-\frac{2x+1}{x-2}\right)\div\frac{2x+1}{x^2+x}$

c) $\left(\frac{a^3-a^2}{a-1}-1\right)\cdot\frac{1}{a-1}+1$

Sol: a) 1, b) $\frac{-3x}{x-2}$, c) a+2

10. Efectúa las siguientes operaciones:

a) $\left(\frac{x^2-1}{x^2+4x+3}\right)^2$ b) $8\div\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}-1\right)$

c) $\frac{3x}{x-\frac{1}{x}}-\frac{3}{x^2+1}$

Sol: a) $\frac{x^2-2x+1}{x^2+6x+9}$, b) -8 (x+1), c) $\frac{3(x^4+1)}{x^4-1}$

11. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $(x-3)^2-2x=(x-2)^2+21$ b) $\frac{(x-4)^2+x}{3}+\frac{x+1}{6}=\frac{(x-2)^2}{3}+(x-5)$

c) $(x-2)^4-10(x-2)^2+9=0$

Sol: a) -4, b) 5 , c) 5, -1, 3, 1

12. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $x^3-9x=0$ b) $x^3-6x^2+11x-6=0$

c) $3x^3+12x^2+3x-18=0$

Sol: a) -3, 0, 3 , b) 1, 2, 3 , c) –2, 1, -3

13. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{x-1}{x-3}+\frac{2x-2}{x+3}=3$ b) $\frac{x+2}{x-2}-\frac{3x}{x+2}=1$

c) $\frac{2x-1}{x+2}+\frac{x-1}{x-2}=3$

Sol: a) 5, b) 4, -2/3, c) 3

14. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases}2x+y=1\\2x^2-y^2=-1\end{cases}$ b) $\begin{cases}2x-6y=0\\x(2y-1)-(y+1)^2=-1\end{cases}$

c) $\begin{cases}2x-3y=2\\x^2-3y^2=4\end{cases}$

Sol: a) (0,1), (2,-3), b) (0,0), (3,1), c) (4,2) doble

15. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\sqrt{x-3}+\sqrt{x+2}=5$ b) $\sqrt{2x+2}-\sqrt{4x-3}=1$

c) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=\sqrt{x-4}$

Sol: a) 7, b) 1 , c) 5

16. Estudia estos sistemas y resuélvelos cuando sea posible:

a) $\begin{cases} x-2y+3z=1 \\ -3x+y=2 \\ -5y+9z=2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x+y+z=2 \\ -x+2y-3z=-10 \\ 2x+3y+z=1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ x+y-z=2 \\ 3y-5z=3 \end{cases}$

Sol: a) Incompatible, b) (3,-2,1), c) $\left(\frac{3-2z}{3},\frac{3+5z}{3},z\right)$

17. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{2x+4}{4}\le 4-x$

b) $\frac{3x-2}{4}-\frac{2x-3}{3}>\frac{(x-2)}{4}$

c) $\begin{cases} \frac{x-3}{2}<4 \\ 3-x<12 \end{cases}$

Sol: a) (-∞, 2] , b) (-∞, 2) , c) (-9, 11)

18. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $(2x+3)(3x-5)\le 0$

b) $\frac{3x+7}{2x-4}>2$

c) $6x^2+7x-3<0$

Sol: a) $\left[-\frac{3}{2},\frac{5}{3}\right]$, b) (2, 15) , c) $\left(-\frac{3}{2},\frac{1}{3}\right)$

19. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\frac{x^2-4}{x}\ge 0$

b) $\frac{x-1}{x^2-2x-3}<0$

c) $\frac{x^2-8x+12}{x^2-4x}\le 0$

Sol: a) (-∞, 2], b) (-∞, -1) ∪ (1, ∞), c) (0, 2] ∪ (4, 6]

20. Resuelve los siguientes sistemas:

a) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{2}>1 \\ y<x-3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} y-x\le 3 \\ y+x\ge -3 \\ x<3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2-4x-y\le -3 \\ x-y\ge 1 \end{cases}$

3: FUNCIONES

DEFINICIÓN. DOMINIO Y RECORRIDO

Una función es una relación entre magnitudes numéricas o variables, de modo que a cada valor de la 1ª le corresponda un único valor de la 2ª (una aplicación entre conjuntos numéricos).

Si A, B son subconjuntos de $\mathbb{R}$ la función $f: A \longrightarrow B$ se llama función real de variable real.

Dominio de una función es el conjunto original A de la aplicación, es decir, los elementos x que tienen imagen $y = f(x)$: $\text{Dom } f(x) = \{x / \exists\ y = f(x)\}$.

Si se nos da la expresión de una función pero no su dominio, se llama **Dominio Máximo** al mayor subconjunto de números reales donde tenga validez dicha expresión.

Restricciones al Dominio Máximo: cocientes, raíces, f^{ones} logarítmicas y f^{ones} trigonométricas.

Así, el Dominio Máximo de una función **polinómica** es $\mathbb{R}$, el D.M. de una función **racional** son los valores de x que no anulan el denominador y el D.M. de una función **irracional** es $\mathbb{R}$ (si el índice es impar) o los valores que hacen el radicando no negativo (si el índice es par). Para calcular el D.M. de una función **definida a trozos** se unen los diferentes subconjuntos para los que está definida.

Recorrido de una función es el conjunto imagen de la aplicación, es decir, el subconjunto de todos los elementos de B que tienen antiimagen $x=f^{-1}(y)$:

$$\text{Rec } f(x) = \{y / \exists\ x \in \text{Dom } f(x) \text{ con } f(x) = y\}$$

Gráficamente, el dominio y el **recorrido** se obtienen por **proyección** sobre los ejes de abscisas y ordenadas respectivamente.

OPERACIONES

Suma: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$, donde $\text{Dom }(f+g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$

$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$, donde $\text{Dom }(f-g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$

Producto por un nº real: $(a\cdot f)(x)= a \cdot f(x)$, donde $\text{Dom}(a \cdot .f) = \text{Dom } f$

Producto: $(f\cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$, donde $\text{Dom }(f\cdot g) = \text{Dom } f \cap \text{Dom } g$

Cociente: $(f / g)(x) = f(x) / g(x)$, donde $\text{Dom }(f / g) = (\text{Dom } f \cap \text{Dom } g) - \{x \in \text{Dom } g \mid g(x)=0\}$

Composición: La función **compuesta** de f y g, $g \circ f$, se obtiene aplicando g a la imágenes de f:

$$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g[f(x)] = (g \circ f)(x) \text{, siendo } \text{Dom}(g \circ f) = \text{Dom } f \cap f^{-1}(\text{Dom } g)$$

Dada un función inyectiva $f(x)$, se denomina **función recíproca**, $f^{-1}(x)$, a la que compuesta con ella da la función identidad: $(f^{-1} \circ f)(x) = (f \circ f^{-1})(x) = x$

Cálculo de $f^{-1}(x)$: **1º** se hace $f(x) = y$; **2º** se intercambian x e y; **3º** se despeja y en f^{on} de x.

EJERCICIOS

1. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=5x^4+4x^3+3x+2$ b) $f(x)=\dfrac{x-1}{2x+6}+x^2$

c) $f(x)=\sqrt{3x+12}$ d) $f(x)=\sqrt{12-3x}$

2. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+8}}{x^2-4}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x-8}}$

c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x+6}$ d) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{25-x^2}$

Sol: a) [-8, -2) ∪ (-2, 2) ∪ (2, ∞), b) (-8, ∞), c) (-∞, 3) ∪ (3, 6) ∪ (6, ∞), d) (-∞, -5) ∪ (-5, -3) ∪ (-3, 5) ∪ (5, ∞)

3. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+3}{2x-12}}$ b) $f(x)=\sqrt{x^2+5x+7}$

c) $f(x)=\sqrt{x^2+3x-10}$ d) $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-4}{x^2-4x}}$

Sol: a) (-∞, -3] ∪ (6, ∞), b) R, c) (-∞, -5] ∪ [2, ∞), d) (-∞, -2] ∪ (0, 2] ∪ (4, ∞)

4. Calcula el dominio de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\ln(x+5)$ b) $f(x)=\ln\dfrac{x^2}{x-8}$

c) $f(x)=\dfrac{\ln(36-x^2)}{x+2}$ d) $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{\ln(x^2-6x+8)}$

Sol: a) (-5, ∞), b) (8, ∞), c) (-6, -2) ∪ (-2, 6), d) (-∞, 2) ∪ (4, ∞)

5. Representa las siguientes funciones:

a) $f(x)=2x-6$ b) $f(x)=|-2x+8|$

b) $f(x)=2-x$ d) $f(x)=\left|\dfrac{2}{3}x-4\right|$

6. Calcula $f(0)$, $f(5)$, $f(-2)$, $f^{-1}(1)$ y $f^{-1}(0)$ en las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^2-2x-3$ b) $f(x)=x^3-1$

c) $f(x)=\begin{cases} x+2 & x\le 3 \\ 5 & x>3 \end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} |9-x^2| & x\le 2 \\ x^2+1 & x>2 \end{cases}$

7. Representa las siguientes funciones:

a) $f(x)=x^2+2x-3$ b) $f(x)=x^2-4$

c) $f(x)=-2x^2+2x+12$ d) $f(x)=-x^2-1$

8. Representa el valor absoluto de las funciones del ejercicio 6.

9. Representa las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} x+2 & x\le 3 \\ 5 & x>3 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} -x+4 & x<2 \\ x^2-2 & x\ge 2 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} -x^2+4 & x\le 2 \\ x^2-6x+8 & x>2 \end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x\le 0 \\ 0 & x>0 \end{cases}$

10. Representa las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} 3-2x & x\le 2 \\ -1 & 2<x<3 \\ \dfrac{x-5}{2} & 3\le x \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x}{3} & x\le 0 \\ \sqrt{x} & 0<x<4 \\ 2 & 4\le x \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} x+2 & x\le -1 \\ -x^2+2x & -1<x<1 \\ \dfrac{1}{x} & 1\le x \end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} |9-x^2| & x\le 2 \\ x^2+1 & x>2 \end{cases}$

11. Calcula el dominio y el recorrido de las funciones que has representado en los ejercicios 9 y 10.

12. Sean $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ y $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ calcula:

a) $(f+g)(x)$ b) $(f\cdot g)(x)$ c) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$ d) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$

Sol: a) $\dfrac{x^2-x+2}{x^2-1}$, b) $\dfrac{x-1}{x^2-1}$, c) $\dfrac{x+1}{(x-1)^2}$, d) $\dfrac{(x-1)^2}{x+1}$

13. Calcula el dominio de las cuatro funciones que has obtenido en el ejercicio anterior.

Sol: a) R-{-1, 1}, b) R-{-1, 1}, c) R-{1}, d) R-{-1}

14. Sean $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ y $g(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ calcula:

a) $f\circ f(x)$ b) $g\circ g(x)$ c) $g\circ f(x)$ d) $f\circ g(x)$

Sol: a) $\dfrac{x-1}{2-x}$, b) $-\dfrac{1}{x}$, c) $\dfrac{2-x}{x}$, d) $-\dfrac{x+1}{2}$

15. Dadas las funciones $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=x+5$ y $h(x)=x^2$ escribe la función $t(x)=\frac{1}{x^2}+5$ como resultado de una composición de las tres.

16. Expresa $f(x)=\sqrt{3x^2+2}$ como composición de tres funciones.

17. Estudia si las siguientes funciones son inyectivas:

a) $f(x)=4x-6$

b) $f(x)=2x^2-6x+4$

c) $f(x)=\frac{x+2}{2x-4}$

d) $f(x)=\ln\left(\frac{2x+8}{5}\right)$

Sol: a) sí, b) no, c) sí, d) sí

18. Calcula la inversa por la composición de las siguientes funciones:

a) $f(x)=4x-6$

b) $f(x)=\frac{x+2}{2x-4}$

c) $f(x)=\ln\left(\frac{2x+8}{5}\right)$

d) $f(x)=e^{2x+1}$

Sol: a) $\frac{x+6}{4}$, b) $-\frac{4x+2}{1-2x}$, c) $\frac{5e^x-8}{2}$, d) $\frac{\ln x-1}{2}$

19. Comprueba los resultados obtenidos en el ejercicio 18.

20. Define las siguientes funciones:

a) El volumen de un cono de altura 4 en función de su generatriz.

b) El área total de un cilindro de radio 3 en función de su altura.

c) El volumen de un cono inscrito en una esfera de radio 4 en función de su altura.

d) El volumen de un cilindro de área lateral 20 en función de su radio.

Sol: a) $\frac{4\pi\left(g^2-16\right)}{3}$, b) $6\pi(3+h)$, c) $\frac{\pi\left(8h^2-h^3\right)}{3}$, d) 10 r

4: LÍMITE Y CONTINUIDAD

LÍMITES DE SUCESIONES

Sucesión **convergente**: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L \iff \forall\varepsilon>0\ \exists\, n_o \in IN^* / n > n_o \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$

Sucesión **divergente**: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \pm\infty \iff \forall\, k\in IR\ \exists\, n_o \in IN^* / n > n_o \Rightarrow a_n > k$ (ó $a_n < k$)

Las sucesiones que no son convergentes ni divergentes se llaman **oscilantes**.

OPERACIONES con ∞, 0 y $a\in IR^*$ (regla de los signos como en el álgebra real):

	SUMA	PRODUCTO	COCIENTE	POTENCIA
CERO	$0+0=0$ $a+0=a$	$0\cdot 0=0$ $a\cdot 0=0$	$\frac{0}{a}=0$ $\frac{0}{0}=$ **?**	$0^{+a}=0$ $a^0=1$ $0^0=$ **?**
INFINITO	$\infty+\infty=\infty$ $\infty+a=\infty$ $\infty-\infty=$ **?**	$a\cdot\infty=\infty$ $\infty\cdot\infty=\infty$	$\frac{\infty}{a}=\infty$ $\frac{\infty}{\infty}=$ **?**	$(+\infty)^{+a}=+\infty$; $(+\infty)^{+\infty}=+\infty$ $(+a)^{+\infty}=\begin{cases}+\infty & \text{si } a>1\\ 0 & \text{si } 0<a<1\end{cases}$ $1^{\infty}=$ **?**
CERO E INFINITO	$0+\infty=\infty$	$0\cdot\infty=$ **?**	$\frac{a}{\infty}=0$, $\frac{a}{0}=\infty$ $\frac{0}{\infty}=0$, $\frac{\infty}{0}=\infty$	$0^{+\infty}=0$ $\infty^0=$ **?**

INDETERMINACIONES: $\boxed{\infty-\infty,\ 0\cdot\infty,\ \frac{0}{0},\ \frac{\infty}{\infty},\ 0^0, \infty^0, 1^{\infty}}$.

Sucesión **polinómica**: el límite es $+\infty$ ó $-\infty$ (sucesión divergente).

Sucesión **racional** (Indet.∞/∞): se dividen N y D por la mayor potencia de n que aparezca (en el denominador). Será <u>divergente</u> cuando gr.N > gr.D; tiene <u>límite cero</u> si gr.N < gr.D; y tiene por límite el <u>cociente de los coeficientes</u> principales cuando gr.N = gr.D

Sucesión **irracional**: si el término general es la **raíz de un polinomio**, la sucesión es divergente. Si el término general es un **cociente de radicales** polinómicos, se procede como en el caso de cociente de polinomios. Si el término general es la **suma o diferencia de dos radicales** polinómicos y aparece la indeterminación $\infty-\infty$, se resuelve: 1º comparando los grados de los términos principales; 2º comparando los coeficientes de dichos términos principales (cuando sean del mismo grado); 3º multiplicando y dividiendo por la expresión irracional conjugada.

Sucesión **potencial-exponencial**: si aparece la indeterminación 1^{∞} se resuelve por el nº e.

LÍMITES DE FUNCIONES

Límite finito de una función **en el infinito**: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ ó $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$. En ambos casos diremos que la recta y =L es una **asíntota horizontal** de la función.

Límite infinito en el infinito: $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x)=+\infty$, …En los cuatro casos que se presentan no hay asíntota horizontal. Podría tener **asíntota oblicua** (rama asintótica) o no (rama parabólica).

- Para calcular los **límites en el infinito** se procede igual que en el caso de las sucesiones.

Límite finito en un punto finito: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \iff \forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, \delta>0\ /\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$.

Límite infinito en un punto finito: $\text{Lím}_{x\to a} f(x) = +\infty$ ó $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$. En ambos casos diremos que la recta $x = a$ es una **asíntota vertical** de la función.

- Para calcular los **límites en un punto finito** se sustituye **x por a** en la expresión de $f(x)$ y se opera. Si al operar da cero en el denominador, los límites laterales son infinitos y hay que mirarles el signo: podría no haber límite en el sentido general y, en todo caso, la recta $x = a$ es una **asíntota vertical**. Si da cero en el numerador y en el denominador, se dividen ambos entre $x-a$, y se repite el proceso. Si es una función definida a trozos, en los puntos de corte de la definición hay que calcular los límites laterales y comprobar si coinciden.

PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES CON LÍMITES

$\lim k = k$	$\lim (k\cdot f) = k \cdot \lim f$	$\lim (f \pm g) = \lim f \pm \lim g$
$\lim (f\cdot g) = \lim f \cdot \lim g$	$\lim\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{\lim f}{\lim g}$, si $\lim g \neq 0$	$\lim e^{f} = e^{\lim f}$
$\lim f^{g} = (\lim f)^{\lim g}$	$\lim (\log f) = \log (\lim f)$	$\lim (\text{sen } f) = \text{sen } (\lim f)$

CONTINUIDAD

$\boxed{f(x) \text{ es continua en } a \iff \lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)}$ Luego debe cumplir:

1. Existe $f(a)$.
2. Existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$
3. $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

La **suma**, **diferencia** y **producto** de funciones continuas es otra función continua. Consecuentemente, las funciones polinómicas son continuas en IR.

El **cociente** de dos funciones continuas es una función continua allí donde no se anule el denominador. Consecuentemente, las funciones racionales son continuas en su dominio.

Las funciones **compuestas** son continuas en su dominio.

Las funciones exponencial, logarítmica, seno y coseno son continuas.

Clasificación de discontinuidades:

DISCONTINUIDADES	EVITABLE (FINITA)	$L^-, L^+ \in$ IR $L^- = L^+$
	DE SALTO (FINITO)	$L^-, L^+ \in$ IR $L^- \neq L^+$
	ASINTÓTICA	L^- ó/y $L^+ = \pm\infty$

[En la tabla: $L^- = \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ y $L^+ = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$]

EJERCICIOS

1. Escribe el término general de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \left\{5, \frac{13}{2}, 8, \frac{19}{2}, 11, \frac{25}{2}, ...\right\}$ b) $a_n = \{192, 96, 48, 24, 12....\}$

c) $a_n = \left\{4, \frac{7}{4}, \frac{12}{7}, \frac{19}{10}, \frac{28}{13}, \frac{39}{17} ...\right\}$ d) $a_n = \{0, 7, -26, 63, -124...\}$

Sol: a) $\frac{3n+7}{2}$, b) $\frac{3}{2^{n-7}}$, c) $\frac{n^2+3}{3n-2}$, d) $(n^3-1)(-1)^n$

2. Calcula cuántos términos de la sucesión $a_n = \frac{3n+1}{n+4}$ quedan fuera de un entorno centrado en su límite y de radio $0{,}011$.

Sol: 996

3. Calcula cuántos términos de la sucesión $a_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ están fuera de un entorno centrado en cero y de radio $0{,}005$.

Sol: 15

4. Dadas las sucesiones $a_n = \frac{3n^3+2n}{n^3+1}$, $b_n = \frac{5n^2+2}{5-n^2}$ y $c_n = \frac{2n^2+1}{1-n}$ calcula:

a) $\lim(a_n + c_n)$ b) $\lim(a_n \cdot b_n)$ c) $\lim\left(\frac{b_n}{c_n}\right)$ d) $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$

Sol: a) -∞, b) -15, c) 0, d) -3/5

5. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim \frac{5n^2+2n}{n^2-3}$ b) $\lim \frac{\sqrt{n^3+4n^2}}{n^2+3}$

c) $\lim \frac{\sqrt{5n^2+2n}}{n^2-3}$ d) $\lim \frac{\sqrt{16n^2+7}}{\sqrt[3]{8n^3+3n+5}}$

Sol: a) 5, b) 0, c) 0, d) 2

6. Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \sqrt{4n^2+2} - \sqrt{4n^2-8n-4}$ b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{2n^2} - \sqrt{2n^2+3n}}$

c) $a_n = \frac{\sqrt{6n^2+3} - (6n+2)}{n}$ d) $a_n = \frac{6\sqrt{n^2+1} - \sqrt{36n^2+n}}{3n}$

Sol: a) 2, b) $-\frac{2\sqrt{2}}{3}$, c) $-\infty$, d) 0

7. Calcula el límite de las siguientes sucesiones:

a) $a_n = \left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^{3n+2}$ b) $a_n = \left(\frac{n^2+2n+3}{n^2-3}\right)^{2n^2+1}$

c) $a_n = \left(\frac{\sqrt{4n^2+3}}{2n-3}\right)^{2n-1}$ d) $a_n = \left(\frac{2n+1}{3n-3}\right)^{5n+2}$

Sol: a) e^6, b) ∞, c) e^{-3}, d) 0

8. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(x^2-8x+3\right)$ b) $\lim_{x\to-\infty}\left(x^3-4x^2+5\right)$

c) $\lim_{x\to\infty}\frac{(3-2x)^2}{-4x^2+2}$ d) $\lim_{x\to\infty}\frac{(3-5x)^2}{-9x^2+10}$

Sol: a) ∞, b) $-\infty$, c) -1, d) -25/9

9. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{x^2+3}{3-2x^2}\right)^{-x^2}$ b) $\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{3x+2}{5x-1}\right)^{-x+3}$

c) $\lim_{x\to\infty}2^{\frac{3x+1}{x^2+2}}$ d) $\lim_{x\to-\infty}2^{\frac{3x+1}{x^2+2}}$

Sol: a) 0, b) 0, c) 1, d) 1

10. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to1}\frac{x-1}{x^2-1}$ b) $\lim_{x\to1}\frac{x^4-1}{x^3-1}$

c) $\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ d) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{x^2-4x+3}$

Sol: a) 1/2, b) 4/3, c) 1/2, d) 2

11. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to-2}\frac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}$ b) $\lim_{x\to-1}\left(\frac{1}{x^2-1}-\frac{2}{x+1}\right)$

c) $\lim_{x\to1}\left(\frac{x+1}{x-1}-\frac{x+1}{x^2-x}\right)$ d) $\lim_{x\to0}\left(\frac{x-1}{3x-2}-\frac{1}{x}\right)$

Sol: a) 0, b) ±∞, c) 2, d) ±∞

12. Calcula por la derecha y por la izquierda los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to1}\left(\frac{x-2}{x^2-1}\right)$ b) $\lim_{x\to2}\frac{3x+2}{x^2-4x+4}$

c) $\lim_{x\to0}\frac{1}{2x^2-x}$ d) $\lim_{x\to-1}\frac{2x+3}{x^3+x^2}$

Sol: a) +∞ por la izquierda y -∞ por la derecha, b) ∞ por los dos lados, c) -∞ por la derecha y ∞ por la izquierda, d) ∞ por la derecha y -∞ por la izquierda

13. Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & x\le 2 \\ \dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2} & x>2 \end{cases}$, calcula:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ b) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

Sol: a) 0, b) no existe, c) no existe, d) 1

14. Halla el valor de a para que exista $\lim\limits_{x\to-1} f(x)$ si $f(x)=\begin{cases} x^2+2 & x\le -1 \\ x+a & x>-1 \end{cases}$

Sol: a = 4

15. Representa una función que cumpla que:

a) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=3$ y $f(x) > 3 f(x) > 3$ cuando $x > 0$

b) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=3$ y $f(x) < 3$ cuando $x > 0$

c) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\infty$ y $f(x) > 0$ para todo x

d) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=-\infty$ y $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=4$

16. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{4}{x+3}$ b) $f(x)=\dfrac{6x^2}{x^2+3}$

c) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-9}$ d) $f(x)=\dfrac{4x^2}{x^2-2x-4}$

Sol: a) y = 0, x = 3, b) y = 6, c) y = 1, x = -3, x = 3 d) y = 4, , $x=1-\sqrt{5}$, $x=1+\sqrt{5}$

17. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=e^{3x+4}$ b) $f(x)=e^{x^2+1}$

c) $f(x)=\ln(2x+6)$ d) $f(x)=\ln(x^2-8x+15)$

Sol: a) y = 0 cuando $x \to -\infty$, b) no tiene, c) x = -3, d) x = 3, x = 5

18. Estudia la continuidad de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} & x\le 1 \\ x & x>1 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} 2x+3 & x\le 0 \\ \dfrac{3}{x+1} & x>0 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x}{x} & x<0 \\ x^2+1 & x\ge 0 \end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & x<1 \\ 2x & x\ge 1 \end{cases}$

Sol: a) Continua en R – {0}, b) Continua en todo R, c) Continua en todo R, d) Continua en todo R

19. Calcula el valor de A para que $f(x)$ sea continua.

a) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{A}{x^2+x+1} & x\le 1 \\ 2x+A & x>1 \end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases} e^{x-1}+1 & x\le 1 \\ x^2+Ax+2 & x>1 \end{cases}$

Sol: a) $A=-3$, b) $A=-1$

20. Estudia el comportamiento de las siguientes funciones en los puntos en los que no están definidas.

a) $f(x)=\dfrac{2x}{1-x}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-x}$

c) $f(x)=\dfrac{x}{9-x^2}$ d) $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-4x+3}$

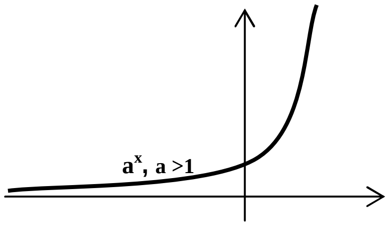
Sol: a) en 1 por la izda ∞ y por la dcha $-\infty$, b) en 0 por la izda ∞ y por la dcha, $-\infty$

c) en –3 por la izda $-\infty$ y por la dcha ∞, d) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=\dfrac{1}{2}$ y el 1 por la izda $-\infty$ y por la dcha ∞

5: FUNCIONES EXPONENCIAL, LOGARÍTMICA Y TRIGONOMÉTRICAS

FUNCIÓN EXPONENCIAL

Dado $a \in IR_+^* - \{1\}$, se denomina función exponencial de base "**a**" a la aplicación de IR en IR que asigna a^x a todo nº real x: $f: IR \rightarrow IR$, $x \rightarrow a^x$

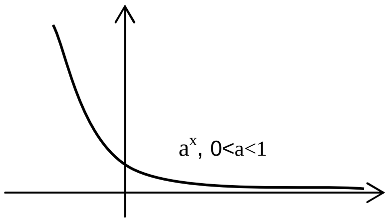


Propiedades comunes ($a \in IR_+^* - \{1\}$):

1. Es siempre positiva, $a^x > 0$.
2. Es continua en todo IR.
3. Pasa por (0, 1), pues $a^0 = 1$.
4. Está acotada inferiormente pero no superiormente.

Propiedades de $f(x) = a^x$ **para a >1**:

1. Es E. Creciente en todo su dominio.
2. $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$ y $\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \Rightarrow OX$ es A. Horizontal por izqda.



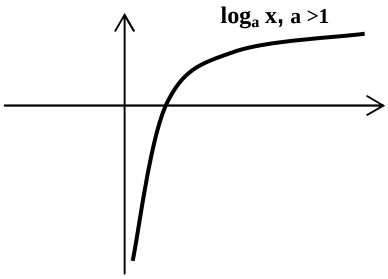
Propiedades de $f(x) = ax$ **para 0<a<1:**

1. Es E. Decreciente en todo su dominio.
2. $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$ y $\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \Rightarrow OX$ es A. Horizontal por drcha.

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

Se llama **f^{on} logarítmica** de base a a la f^{on} recíproca de $f(x) = a^x$, y se escribe $f(x) = \log_a x$:

$$f: IR_+^* \longrightarrow IR$$
$$x = a^y \longrightarrow y = \log_a x$$

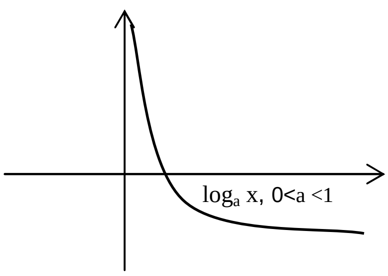


Propiedades comunes ($a \in IR_+^* - \{1\}$):

1. Es continua en IR_+^*.
2. Pasa por (1, 0), pues $a^o = 1 \Rightarrow \log_a 1 = 0$.
3. No está acotada ni superior ni inferiormente.
4. Su gráfica es simétrica de la de exponencial.

Propiedades de $f(x) = \log_a x$ **para a >1**:

1. Es E. Creciente en todo su dominio.
2 Si $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x < 0$. Si $x > 1 \Rightarrow \log_a x > 0$.
3. $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = +\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = -\infty \Rightarrow OY$ es A. Vertical por izqda.



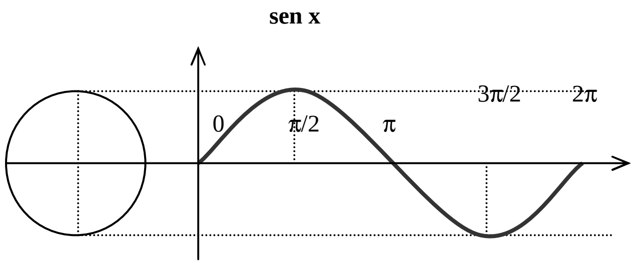
Propiedades de $f(x) = \log_a x$ **para 0<a<1**:

1. Es E. Decreciente en todo su dominio.
2. Si $0 < x < 1 \Rightarrow \log_a x > 0$. Si $x > 1 \Rightarrow \log_a x < 0$.
3. $\lim_{x\to+\infty} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty \Rightarrow OY$ es A. Vertical por izqda.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Se llama **función seno** a la aplicación de IR en IR que asigna a todo nº real, x, el valor sen x:

$$\text{sen}: IR \longrightarrow IR$$
$$x \longrightarrow \text{sen } x$$

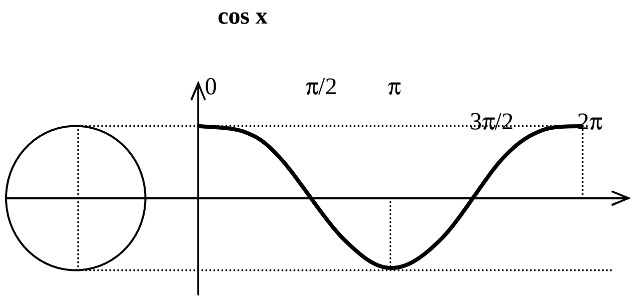


Propiedades:

1. Dom (sen x) = IR y Rec (sen x) = [-1, 1]
2. Es continua y acotada: $|\text{sen } x| \leq 1$
3. Es periódica de periodo 2π.
4. Es impar: (sen –x) = - sen x, por lo que es simétrica respecto del origen.

Se llama **función coseno** a la aplicación de IR en IR que asigna a todo nº real, x, el valor cos x:

$$\cos: IR \longrightarrow IR$$
$$x \longrightarrow \cos x$$



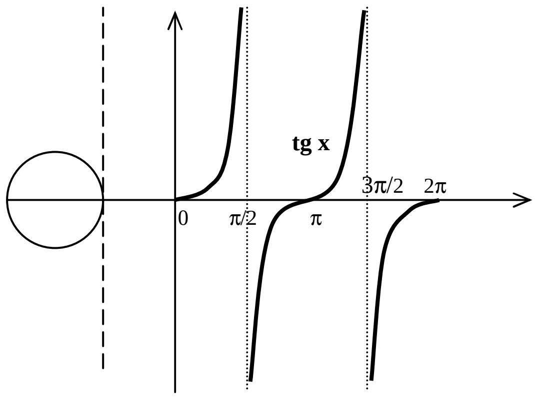
Propiedades:

1. Dom (cos x) = IR y Rec (cos x) = [-1, 1]
2. Es continua y acotada: $|\cos x| \leq 1$
3. Es periódica de periodo 2π
4. Es par: (cos –x) = cos x, por lo que es simétrica respecto de OY.

La **función tangente** se define como la función cociente $\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$.

Propiedades:

1. Dom (tg x) = { $x \in IR$ / $\cos x \neq 0$ }, Rec (tg x) = IR
2. No está acotada y presenta discontinuidad asintótica en todos los puntos de la forma $x=(2k+1)\,\pi/2$, con k entero.
3. Es periódica de periodo π: $\text{tg } x = \text{tg } (x + \pi)$.
4. Es impar: tg (-x) = - tg x, por lo que es simétrica respecto del origen.
5. Es E. Creciente en su dominio.



EJERCICIOS

FUNCIÓN EXPONENCIAL

1. Representa gráficamente las funciones $f(x)=2^x$ y $g(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Señala sus propiedades. Distingue entre las que son comunes y las que las diferencian.

2. Representa, haciendo uso de la calculadora, la función $y=e^x$.

3. Representa e indica las propiedades de las funciones $y=3^x$, $y=3^{-x}$.

4. Considerando la función $f(x)=3^x$, calcula:

   a) f(-1) b) f(1/2) c) f(2/3) d) $f^{-1}(1/27)$, e) $f^{-1}(-3)$.

   Sol: a) 1/3, b) $\sqrt{3}$, c) $\sqrt[3]{9}$, d) – 3, e) No existe.

5. A partir de la gráfica de la función $f(x)=2^x$, representa:

   a) $f_1(x)=2^x+3$ b) $f_2(x)=2^x-1$ c) $f_3(x)=2^{x+3}$ d) $f_4(x)=2^{x-1}$.

6. De una función de la forma $f(x)=k\cdot a^x$ sabemos que f(3) = 6 y que f(8) = 192. Calcula a y k.

   Sol: a = 2; k = ¾

7. A partir de la gráfica de la función $f(x)=2^x$, representa: $g(x)=\left|2^x\right|$ y $h(x)=2^{|x|}$.

FUNCIÓN LOGARÍTMICA

1. Representa gráficamente las funciones $f(x)=\log_2(x)$ y $g(x)=\log_{1/2}(x)$. Señala sus propiedades. Distingue entre las que son comunes y las que las diferencian.

2. Representa, haciendo uso de la calculadora, la función y = ln x.

3. En la función $f(x)=\log_a(x)$, calcula a sabiendo que: a) f(1/64) = 3. b) f(1/3) = -2.

   Sol: a) a=1/4. b) $a=\sqrt{3}$.

4. A partir de la gráfica de la función f(x) = log x representa:

   a) $f_1(x)=1+\log(x)$ b) $f_2(x)=-3+\log(x)$ c) $f_3(x)=\log(x+1)$ d) $f_4(x)=\log(x-3)$

5. A partir de la gráfica de la función $f(x)=\log_2(x)$. Representa: $g(x)=\left|\log_2(x)\right|$ y $h(x)=\log_2|x|$.

6. Representa en el mismo sistema de referencia las funciones $f(x)=2^x$ y $g(x)=\log_2(x)$. ¿Qué se observa? ¿En qué punto se cortan?.

   Sol: Sus gráficas son simétricas respecto a la bisectriz del primer cuadrante. Son funciones inversas entre si. No se cortan en ningún punto.

7. Calcula los dominios de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\log(2+x)$ b) $f(x)=\log(1+x^2)$ c) $f(x)=\log(4-x^2)$,

d) $f(x)=\log(x^2-4x+3)$ e) $f(x)=\log\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$.

Sol: a) (-2, ∞), b) R, c) (-2,2), d) $(-\infty,1)\cup(3,\infty)$, e) $(-\infty,-1)\cup(4,\infty)$

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

1. Representa gráficamente y señala las propiedades de las funciones: y = Sen(x), y = Cos(x) e y=Tan(x).

2. A partir de la gráfica de la función f(x) = cos x. Representa las funciones:

a) $f_1(x)=\mathrm{Cos}(2x)$ b) $f_2(x)=2\cdot\mathrm{Cos}\,x$ c) $f_3(x)=2\cdot\mathrm{Cos}(2x)$

3. Indica cuál es el periodo y cual el recorrido de cada una de esas funciones.

Sol: a) Periodo π. Recorrido [-1, 1], b) Periodo 2π, Recorrido [-2, 2], c) Periodoπ, Recorrido[-2, 2]

4. Tomando como referencia la gráfica de la función f(x) = sen x. Representa:

a) g(x) = 2 + sen x b) h(x) = - 2 + sen x

Indica su periodo y su recorrido.

Sol: a) Periodo 2π. Recorrido [1, 3], b) Periodo 2π, Recorrido[-3, -1]

5. Indica cuáles son las asíntotas verticales de la función $f(x)=\mathrm{Tan}(x)$ y calcula:

a) $\lim_{x\to\pi/2^-}\mathrm{Tan}(x)$ b) $\lim_{x\to\pi/2^+}\mathrm{Tan}(x)$.

Sol: Asíntotas $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$ con $k\in Z$; a) ∞, b) -∞

6. Representa la función f(x) = |Cos x| y deduce cuales son su dominio, su recorrido y su periodo.

Sol: Dominio R, Recorrido [0, 1], Periodo π.

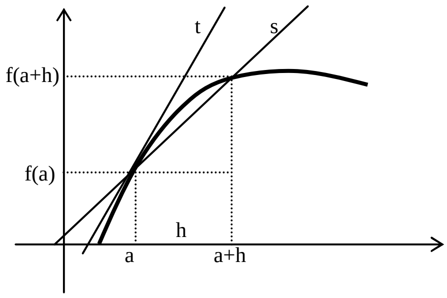
6: DERIVADAS

TASA DE VARIACIÓN Y DERIVADA

Tasa de variación media en [a, b]: $\mathrm{TVM}[a,b] = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$

Tasa de variación instantánea en a: $\mathrm{TVI}(a) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{b \to a} \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Interpretación gráfica:



$$\text{pte } s = \operatorname{tg} \beta = \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \mathrm{TVM}\ [a, a+h]$$

$$\text{pte } t = \operatorname{tg} \alpha = \boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)} = D\,f(a) = \frac{df}{dx}(a)$$

La pendiente de la recta tangente en un punto (la derivada) mide la monotonía de la función en ese punto:

- Si la pte. es positiva, $f'(a) = \operatorname{tg} \alpha > 0 \Rightarrow$ f es **E. Creciente** en (a, f(a))
- Si la pte. es negativa, $f'(a) = \operatorname{tg} \alpha < 0 \Rightarrow$ f es **E. Decreciente** en (a, f(a))

Si una función tiene un máximo o un mínimo relativo en $x=a$, la recta tangente en dicho punto deberá ser horizontal: f derivable en $x = a$ y (a, f(a)) extremo relativo $\Rightarrow f'(a) = 0$

Los puntos de una función que verifican **$f'(x) = 0$** se denominan **puntos singulares**.

FUNCIÓN DERIVADA

Llamamos **función derivada de f** a la función $f': D' \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longrightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Se designa por $y' = f'(x) = D\,f(x) = df / dx$

Derivadas de algunas funciones:

F$^{\underline{on}}$ Elemental	Derivación	Cambiando **x** por **f** y multiplicando por **f '** obtenemos la "**forma compuesta**"
Constante	$k' = 0$	
Identidad	$x' = 1$	
Potencial	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$	$(f^n)' = n \cdot f^{n-1} \cdot f'$
Irracional	$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \dfrac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}$
Exponencial	$(e^x)' = e^x$	$(a^x)' = a^x \ln a$
Logarítmica	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a} = \dfrac{\log_a e}{x}$
Potencial-Exponencial	$(x^x)' = x^x (1+\ln x)$	$(f^g)' = g \cdot f^{g-1} \cdot f' + f^g \cdot \ln f \cdot g'$
Trigonométricas	$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$ $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$	$(\operatorname{arc.sen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\operatorname{arc.cos} x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\operatorname{arc.tg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Derivada de las operaciones con funciones:

Operación	**Derivación**		
Suma	$(f + g)' = f' + g'$		
Producto por k	$(k \cdot f)' = k \cdot f'$		
Producto	$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$	$(f \cdot g \cdot h)' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$	
Cociente	$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$	F$^{\underline{on}}$ Inversa	$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$
Composición	$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$	F$^{\underline{on}}$ Recíproca	$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

APLICACIONES DE LA DERIVADA

- La **ecuación de la recta tangente** a $f(x)$ en $x = a$ será: $y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$
- Cálculo de los **intervalos de monotonía** de una función:
    1. Se hallan los **puntos críticos**: $\{ x \in IR \,/\, f'(x) = 0$ ó $\nexists \; f'(x) \}$.
    2. Se comprueba el **signo de f’** en cada intervalo resultante.
- Los puntos donde cambia la monotonía son los **extremos** de la función.
- Cálculo de los **intervalos de curvatura** de una función:
    1. Se hallan los **puntos**: $\{ x \in IR \,/\, f''(x) = 0$ ó $\nexists \; f''(x) \}$.
    2. Se comprueba el **signo de f ’’** en cada intervalo resultante.
- Los puntos donde cambia la curvatura son los **puntos de inflexión** de la función.

EJERCICIOS

DEFINICIÓN

1. Halla la tasa de variación media en los siguientes casos:

   a) $f(x) = x + 2$ en [-1,5] b) $f(x) = \ln(x)$ en [1,2].

   Sol: a) 1; b) ln 2

2. Se ha lanzado verticalmente hacia arriba una piedra. La altura en metros alcanzada al cabo de t segundos viene dada por la expresión: $e = f(t) = 20t - t^2$ .Halla la velocidad media en el intervalo de tiempo comprendido entre t=0 y t=5.

   Sol: 15 m/s

3. Calcula, usando la definición, la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

   a) $f(x) = 3x - 5$ en x =1. b) $f(x) = x^2$ en x = - 2.

   c) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en x = 2. d) $f(x) = x^2 + 3x$ en x = -1.

   Sol: a) f´(1) = 3, b) f´(-2) = -4, c) f´(2) = -1/4, d) f´(-1 = 1)

4. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a las funciones del ejercicio anterior en los puntos indicados. Haz una representación gráfica de cada caso.

   Sol: a) y = 3x-5; b) y = -4x- 4; c) y = -1/4 x +1; d) y = x -1

5. Calcula, aplicando la definición, la función derivada de cada una de las funciones siguientes:

   a) $f(x) = x^2 - x$ b) $f(x) = \dfrac{2}{x}$ c) $f(x) = \sqrt{x}$ d) $f(x) = 5$

   Sol: a) f´(x) = 2x -1, b) f´(x) = - 2/x²; c) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, d) f´(x) = 0

CÁLCULO

1. Halla la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = 2x^3 - 8x + 4$	b) $y = -5x^2 + 4x$	c) $y = (x-3)^3$	d) $y = \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^4}$
e) $y = \sqrt[3]{x} + 3\sqrt[4]{x^3} - \dfrac{\sqrt{x}}{3}$	f) $y = 2\sqrt{x^3} - \dfrac{1}{\sqrt{x}}$	g) $y = 1 - \dfrac{1}{x^4} + 3\sqrt[4]{x}$	h) $y = \dfrac{2x}{1+\sqrt{x}}$
i) $y = \dfrac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$	j) $y = x^2 e^x$	k) $y = \dfrac{e^x}{\text{Sen}x}$	l) $y = x^3 \cdot \text{Cos}x$
m) $y = \dfrac{\ln x}{5x}$	n) $y = x \cdot e^x + x^3 \cdot \ln x$	o) $y = 3^x - \text{Tan}x$	p) $y = \log x \cdot \text{Cos}x$
q) $y = 3^4 + \dfrac{2^x}{x}$	r) $y = \dfrac{3e^x - 4x}{\sqrt[3]{x}}$	s) $y = \dfrac{x + e^x}{x - e^x}$	t) $y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

2. Halla la derivada de las siguientes funciones compuestas:

a) $y=\left(x^4-5x^2+3\right)^3$ b) $y=\sqrt{x^2-8x}$ c) $y=(1-\text{sen}x)^4$ d) $y=\dfrac{2}{(x^3-3)^2}$

e) $y=\sqrt[3]{7x+13}$ f) $y=(\text{sen}\,x-\cos x)^2$ g) $y=\text{Tan}^3 x$ h) $y=\text{Tan}\left(x^3\right)$

i) $y=4\text{Tan}(\sqrt{3x})$ j) $y=\ln(\text{sen}x)$ k) $y=\ln(\cos\sqrt{x})$ l) $y=5^{1-3\cos x}$

m) $y=\cos^3\left(7x^2-13x\right)$ n) $y=\ln\dfrac{x+1}{x-1}$ o) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

3. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $y = x^3 - 4x + 1$ b) $y=\dfrac{2}{x^2}+3\text{senx}$ c) $y=3-x\sqrt{x}$ d) $y = 3^x + 2^x$

e) $y=\dfrac{e^x}{x}$ f) $y=\sqrt{2^x+1}$ g) $y = \ln(x+e^x)$ h) $y=\dfrac{x}{\ln x}$

i) $y=\ln(\text{sen}\sqrt{x})$ j) $y = (x+\cos x)^3$

Soluciones: a) $3x^2 - 4$, b) $-4/x^3 + 3\cos x$, c) $-3\sqrt{x}/2$, d) $3^x\ln 3 + 2^x\ln 2$,
e) $e^x(x+1)/x^2$, f) $2^{x-1}\ln 2/\sqrt{(2x+1)}$, g) $(1+e^x)/(x+e^x)$, h) $(\ln x -1)/\ln^2 x$,
i) $\cos\sqrt{x})/(2\sqrt{x}\cdot \text{sen}\sqrt{x})$, j) $3(x+\cos x)^2(1-\text{sen}\,x)$

4. Dadas las funciones: $f(x) = 3x^2 - x$, $g(x) = \ln x$, $h(x) = \cos x$, calcula:

a) $f''(-2)$ b) $g'''(-1)$ c) $h'''(0)$

Sol: a) 6; b) -2; c) 0

5. Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x|$ b) $f(x) = |5x-3|$ c) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & \text{si } x<0 \\ -x+2 & \text{si } x\ge 0\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases} \ln x & \text{si } x\ge 1 \\ x-1 & \text{si } x<1\end{cases}$

Sol: a) Derivable en R-{0}; b) R-{3/5}; c) R-{o}; d) Derivable en R

APLICACIONES

1. Halla la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)= e^x$ en el punto de abscisa $x = 0$.

Sol: $y = x+1$

2. ¿En qué puntos corta a los ejes de coordenadas la recta tangente a la función $y = x^2 - 4x + 2$ en el punto de abscisa 1?

Sol: (0,1); (1/2,0)

3. ¿En qué punto la recta tangente a la función $y=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$ es horizontal?

Sol: (0,1)

4. ¿En qué punto la recta tangente a la función $y = 2x^2 - 3x$ es paralela a la bisectriz del primer cuadrante?

Sol: (1,-1)

5. Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones y calcula sus extremos relativos.

a) $f(x) = 2x^3 -3x^2 -12x + 4$ b) $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$ c) $f(x) = x^3 +3x^2 + 1$

d) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$ e) $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Sol: a) Dec en (-1,2), crec en el resto. Max. relat. En x = -1. Min. relat. en x = 2.

b) Decreciente en todo su dominio.

c) Dec. en (-2,0), crec. en el resto. Max. relat. en x = -2. Min. relat. en x = 0.

d) Crec. En $(1, \infty)$, dec. en $(-\infty, 0) \cup (0, 1)$. Min. relat. en x=1.

e) Crec. en $(-\infty, -1) \cup (-1, 0)$. Dec. en $(0, 1) \cup (1, \infty)$ Max. relat. en x=0.

6. A partir del estudio de las asíntotas, monotonía y extremos relativos. Representa las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 -3x +2$ b) $f(x) = - x^3 + 4x$ c) $f(x) = x^4 - 4x^2$

d) $f(x) = \dfrac{x+3}{x-1}$ e) $f(x) = \dfrac{2}{x+3}$ f) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2-4}$

7: ESTADÍSTICA

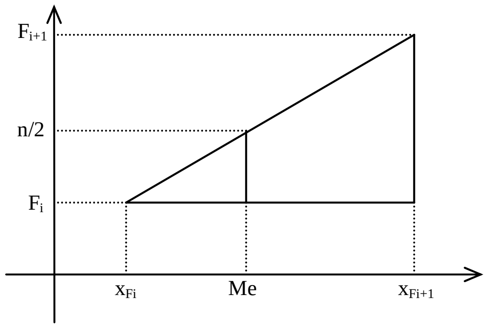
PARÁMETROS ESTADÍSTICOS

- La **MODA**, Mo, es el valor de la variable estadística que más se repite –el de mayor frecuencia absoluta-. Con datos agrupados, la clase modal es la de mayor f.a., y su marca de clase se suele tomar como aproximación de la moda. Puede haber más de una moda o ninguna.

- La **MEDIANA**, Me, es el valor de la variable estadística que ocupa el lugar central, después de haber ordenado los datos de la distribución estadística. Si el nº de datos es par, la mediana es el promedio de los dos valores centrales.

Si los datos están agrupados, llamamos clase mediana a la clase en la que se encuentra el valor de la mediana (la 1ª cuya frecuencia acumulada es mayor que la mitad del nº de datos). En estos casos, la expresión para calcular la mediana es (aplicando semejanza):

$$Me = x_{F_i} + (x_{F_{i+1}} - x_{F_i}) \cdot \frac{\frac{n}{2} - F_i}{F_{i+1} - F_i}$$



Donde: x_{F_i} = extremo inferior de la clase mediana.

$x_{F_{i+1}}$ = extremo superior de la clase mediana

n = nº total de datos

F_i = f.a.a. de la clase anterior a la clase mediana

F_{i+1} = f.a.a. de la clase mediana

- La **MEDIA ARITMÉTICA** de una v.e., $\overline{x}$, es la media aritmética o promedio de todos los valores o marcas de clase de la distribución estadística.

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Sin repetir los valores de la variable: $\overline{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + ... + x_k f_k}{f_1 + f_2 + ... + f_k}$ ó $\boxed{\overline{x} = \frac{\sum x_i f_i}{n}}$

- El **RANGO** o recorrido, es la diferencia entre el mayor y el menor de los valores que toma la v.e. Si los datos están agrupados, es la diferencia entre la mayor marca de clase y la menor.

- La **VARIANZA**, σ^2 ó s^2, es el promedio de "los cuadrados de las desviaciones de cada valor de la v.e. respecto de la media".

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2}{n} \quad ó \quad \boxed{\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \overline{x})^2 \cdot f_i}{n} = \frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{n} - \overline{x}^2}$$

- Se suele utilizar más la **DESVIACIÓN TÍPICA**, σ , que es la raíz cuadrada de la varianza:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \overline{x})^2 \cdot f_i}{n}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 \cdot f_i}{n} - \overline{x}^2}$$

- Para poder comparar las dispersiones de distintas v.e. se utiliza el **COEFICIENTE DE VARIACIÓN**, CV, que es el cociente entre la desviación típica y la media:

$$CV = \frac{\sigma}{\overline{x}}$$

VARIABLES ESTADÍSTICAS BIDIMENSIONALES

La **correlación** es la relación o dependencia que existe entre las dos v.e. unidimensionales que constituyen la v.e. bidimensional. La nube de puntos da una idea de esta correlación.

Se llama **COVARIANZA** de una variable bidimensional (X,Y), σ_{xy}, a la media aritmética de los productos de las desviaciones de cada variable respecto de su media respectiva:

$$\sigma_{xy} = \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n} = \frac{\sum f_i x_i y_i}{n} - \bar{x}\,\bar{y}$$

El **coeficiente de correlación lineal de Pearson**, **r**, es el que permite "cuantificar" la correlación lineal entre las dos variables: $r = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}$

Llamamos **recta de regresión** de una v.e. bidimensional a la recta que mejor se ajuste a todos los puntos del diagrama de dispersión (cuando exista correlación lineal fuerte, es decir, r esté próximo a ± 1).

Llamamos **recta de regresión de Y sobre X** a la recta de la forma $y - \bar{y} = m(x - \bar{x})$ obtenida aplicando el método de los mínimos cuadrados. La pendiente, m, recibe el nombre de "<u>coeficiente de regresión</u>" de Y sobre X, y vale: $m = \sigma_{xy}/\sigma_x^2$. Luego la recta de regresión de Y sobre X es:

$$\boxed{y - \bar{y} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2}(x - \bar{x})}$$

Análogamente, la **recta de regresión de X sobre Y** es: $\boxed{x - \bar{x} = \dfrac{\sigma_{xy}}{\sigma_y^2}(y - \bar{y})}$

EJERCICIOS

ESTADÍSTICA

1. Calcula media, desviación típica y coeficiente de variación en la distribución siguiente: tiempo que emplean en ir de su casa al colegio un grupo de alumnos.

Tiempo (min)	(0,5]	(5,10]	(10,15]	(15,20]	(20,25]	(25,30]
Nº de alumnos	2	11	13	6	3	1

Sol: $\bar{x} = 12{,}5 \quad \sigma = 5{,}65 \quad C.V. = 0.45$

2. Halla Q1, Me, Q3 y P_{40} en la distribución: 2, 3, 3, 3, 5, 6, 6, 7, 7, 8, 8, 9, 10, 10

Sol: Q1 = 3 Me=6,5 ; Q3= 8; P_{40} = 6

3. En la siguiente distribución de notas, halla Me, Q_1, Q_3, P_{80}, P_{90} y P_{99}.

Notas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Nº de alumnos	7	15	41	52	104	69	26	13	19	14

4. Obtén la distribución de frecuencias acumuladas y representa el correspondiente polígono, relativos a los datos de la tabla siguiente:

Intervalos	200-240	240-280	280-320	320-360	360-400
Frecuencias	57	82	73	31	15

5. Halla gráfica y numéricamente Q_1, Me, Q_3 y P_{90}.

Sol: Q1 = 243,66%; Me = 275,12; Q3 = 309,86; P_{90} = 346,06

6. La altura, en centímetros, de un grupo de alumnos y alumnas de una misma clase es:

150, 169, 171, 172, 172, 175, 181, 182, 183, 177, 179, 176, 184, 158

Calcula la mediana, los cuartiles, P_{15} y P_{90}.

Sol: Me = 175,5; Q1 = 171; Q3 = 181; P_{15} = 169; P_{90} = 183

7. Los gastos mensuales de una empresa A tienen una media de 100.000 euros y una desviación típica de 12.500 euros. En otra empresa B la media es 15.000 euros y la desviación típica 2.500 euros. Calcula el coeficiente de variación y di cuál de las dos tiene mayor variación relativa.

Sol: C.V.(A) = 12,5% C.V.(B)= 16,67%

8. En una población de 25 familias se ha observado la variable X = "número de coches que tiene la familia" y se han obtenido los siguientes datos:

0, 1, 2, 3, 1 0, 1, 1, 1, 4 3, 2, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 1, 1 2, 1, 3, 2, 1

a) Construye la tabla de frecuencias.
b) Haz el diagrama de barras.
c) Calcula la media y la desviación típica.
d) Halla la mediana y los cuartiles.
e) Haz un diagrama de caja.

Sol: $\bar{x} = 1.56; \sigma = 0.94; Me = 1; Q_1 = 1; Q_3 = 2$

9. En la distribución de pesos de 500 personas se han obtenido los siguientes parámetros de posición: $Q_1 = 62$ kg, Me = 72 kg, $Q_3 = 78$ kg. Di el número de personas cuyo peso:
   a) Es menor que 78 kg.
   b) Está comprendido entre 62 kg y 72 kg.
   c) Es inferior a 62 kg.

Sol: a) 375 personas, b) 125 personas, c) 125 personas

10. Al preguntar a un grupo de personas cuánto tiempo dedicaron a ver televisión durante un fin de semana, se obtuvieron estos resultados:

TIEMPO (horas)	N.º DE PERSONAS
[0; 0,5)	10
[0,5; 1,5)	10
[1,5; 2,5)	18
[2,5; 4)	12
[4, 8)	12

11. A un conjunto de 5 números cuya media es 7,31 se le añaden los números 4,47 y 10,15. ¿Cuál es la media del nuevo conjunto de números?

Sol: 7,31

12. Considérense los siguientes datos: 3, 8, 4, 10, 6, 2. Se pide:
   a) Calcular su media y su varianza.
   b) Si los todos los datos anteriores los multiplicamos por 3, ¿cuál será la nueva media y desviación típica.

Sol: a) 5,5 y 7,92, b) 16,5 y 71,28

13. Completar los datos que faltan en la siguiente tabla estadística:

x_i	f_i	F_i	n_i
1	4		0.08
2	4		
3		16	0.16
4	7		0.14
5	5	28	
6		38	
7	7	45	
8			

   a) Calcular la media, mediana y moda de esta distribución.
   b) En la distribución de las notas de un examen el primer cuartil fue 4. ¿Qué significa esto?

Sol: a) 4,76 ; 5 y 6

14. La nota media de los aprobados en un examen de Matemáticas ha sido 6,8, y la de los suspensos, 3,5. Calcula la nota media de la clase sabiendo que hubo 35 aprobados y 15 suspensos.

Sol 15,81

15. Justifica que la suma de las frecuencias relativas es siempre igual a 1.

16. Dos distribuciones estadísticas, A y B, tienen la misma desviación típica. Si la media de A es mayor que la de B, ¿cuál tiene mayor coeficiente de variación?. Si la media de A es doble que la de B, ¿cómo serán sus coeficientes de variación?

17. Los pesos de 40 alumnos de una clase se distribuyen del siguiente modo:

Intervalos	35,5-42,5	42,5-49,5	49,5-56,5	56,5-63,5	63,5-70,5	70,5-77,5
Nº alumnos	2	11	13	9	3	2

a) Representa gráficamente (histograma) y estima $\overline{x}$ y σ.

b) Calcula $\overline{x}$ y σ, y obtén el porcentaje de chicos que hay en el intervalo $(\overline{x}-\sigma, \overline{x}+\sigma)$.

c) Calcula la mediana y los cuartiles y estima el centil que corresponde a cada una de las siguientes medidas: 40 kg, 50 kg, 60 kg, 70 kg.

Sol: a) $\overline{x}=54{,}05$; $\sigma=8{,}36$; 67% b) Me= 53,27; Q_1=47,59; Q_3=59,61; a 40 kg el centil 3 ; a 50 el 35; a 60 el 76; a 70 kg el centil 94 aprox.

ESTADÍSTICA BIDIMENSIONAL

1. Para cada uno de los siguientes casos indica:
   - Cuáles son las variables que se relacionan.
   - Si se trata de una relación funcional o de una relación estadística y, en estos casos, el signo de la correlación.

   a) Renta mensual de una familia-gasto en electricidad.

   b) Radio de una esfera-volumen de esta.

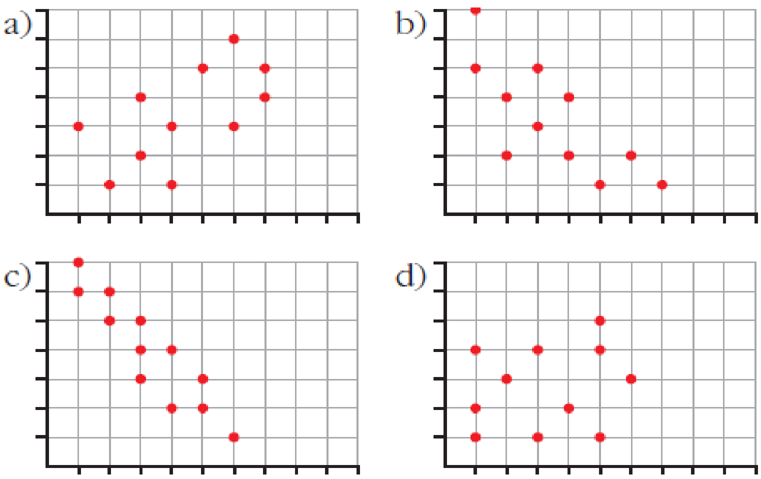
   c) Litros de lluvia recogidos en una ciudad-tiempo dedicada a ver la televisión por sus habitantes.

   d) Longitud del trayecto recorrido en una línea de cercanías-precio del billete.

   e) Peso de los alumnos de 1-º de Bachillerato-número de calzado que usan.

   f) Toneladas de tomate recogidas en una cosecha-precio del kilo de tomate en el mercado.

2. Observa estas distribuciones bidimensionales y asigna razonadamente uno de los siguientes coeficientes de correlación a cada gráfica: $0{,}2$; $-0{,}9$; $-0{,}7$; $0{,}6$



Sol: d-c-b-a

3. La siguiente tabla muestra el número de gérmenes patógenos por centímetro cúbico de un determinado cultivo según el tiempo transcurrido:

N.° DE HORAS	0	1	2	3	4	5
N.° DE GÉRMENES	20	26	33	41	47	53

a) Calcula la recta de regresión para predecir el número de gérmenes por centímetro cúbico en función del tiempo.

b) ¿Qué cantidad de gérmenes por centímetro cúbico cabe esperar que haya a las 6 horas? ¿Es buena esta estimación?

Sol: a) $y = 19{,}81 + 6{,}74x$, b) (6) = 60,25 ≈ 60 gérmenes

4. La media de los pesos de los individuos de una población es de 65 kg, y la de sus estaturas, 170 cm. Sus desviaciones típicas son 5 kg y 10 cm. La covarianza es 40 kg · cm. Halla:

a) Coeficiente de correlación.

b) La recta de regresión de los pesos respecto de las estaturas.

c) Estima el peso de un individuo de 180 cm de estatura perteneciente a ese colectivo.

Sol: a) $r= 0{,}8$, b) $y = 0{,}4x – 3$, c) 69 kg

5. En una zona residencial se ha tomado una muestra para relacionar el número de habitaciones que tiene cada piso (h) con el número de personas que viven en él (p). Estos son los resultados:

Habit.	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5
Personas	1	2	2	3	3	1	5	4	5	6

Represéntalos mediante una nube de puntos. Calcula el coeficiente de correlación e interprétalo.

Sol: $r = 0{,}88$

6. En una cofradía de pescadores, las capturas registradas de cierta variedad de pescados, en kilogramos, y el precio de subasta en lonja, en euros/kg, fueron los siguientes:

x (kg)	2.000	2.400	2.500	3.000	2.900	2.800	3.160
y (€/kg)	1,80	1,68	1,65	1,32	1,44	1,50	1,20

a) ¿Cuál es el precio medio registrado?

b) Halla el coeficiente de correlación lineal e interprétalo.

c) Estima el precio que alcanzaría en lonja el kilo de esa especie si se pescasen 2 600 kg.

Sol: a) 1,51 €, b) $r=-0{,}97$, c) 1,59 €

7. ¿Qué punto tienen en común las dos rectas de regresión?

8. Prueba que el producto de los coeficientes de regresión m_{yx} y m_{xy} es igual al cuadrado del coeficiente de correlación.

9. La recta de regresión de Y sobre X de una cierta distribución bidimensional es $y = 1{,}6x – 3$. Sabemos que $\overline{x} = 10$ y $r = 0{,}8$.

a) Calcula $\overline{y}$

b) Estima el valor de y para $x = 12$ y para $x = 50$. ¿Qué estimación te parece más fiable?

Sol: a) 13, b) $y(12) = 16{,}2$; $y(50) = 77$; es más fiable $y(12)$

8: DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

SUCESOS

Propiedades:
1. $\overline{E} = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = E$
2. A y B contrarios $\Rightarrow$ A y B incompatibles (A y $\overline{A}$ incompatibles)
3. A y B incompatibles $\not\Rightarrow$ A y B contrarios

Operaciones:
1. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow$ A y B son incompatibles
2. $A \cap B \neq \emptyset \Leftrightarrow$ A y B son compatibles
3. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (Leyes de De Morgan)

Un conjunto de sucesos, $A_1, A_2, \ldots, A_n$, es un sistema completo $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} A_i \cap A_j = \emptyset & \forall\ i \neq j \\ A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = E \end{cases}$

PROBABILIDAD

Ley de los Grandes Números (Bernouilli): “La frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un nº a medida que crece indefinidamente el nº de pruebas”.

A ese nº lo llamaremos **probabilidad** (a posteriori) del suceso: $p(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(A)}{n} = \lim_{n\to\infty} fr(A)$

Regla de Laplace: Si los sucesos elementales son equiprobables, la **probabilidad** (a priori) de un suceso A es $p(A) = \frac{\text{nº de casos favorables al suceso A}}{\text{nº de casos posibles}}$

VARIABLE ALEATORIA

Una **variable aleatoria**, X, es una *aplicación* que asocia a cada elemento del espacio muestral un nº real: $X: E \to IR$

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD DISCRETA:

La **función de probabilidad** de una v.a. discreta es aquella que hace corresponder a cada valor de la v.a. su probabilidad: $X \to [0,1]$

$x_i \to p_i$

Media, <u>esperanza matemática</u> o <u>valor esperado</u>: $\mu = \Sigma\, x_i \cdot p_i$

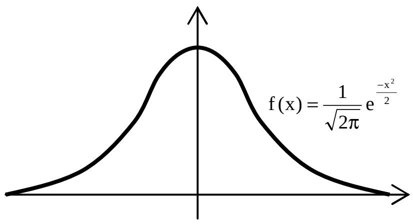
Varianza: $\sigma^2 = \Sigma\, (x_i - \mu)^2 \cdot p_i = (\Sigma x_i^2 \cdot p_i) - \mu^2$

Desviación típica: $\sigma = \sqrt{\sum (x_i - \mu^2)\cdot p_i} = \sqrt{\sum x_i^{\,2} \cdot p_i - \mu^2}$

Si la v.a. discreta sigue una **distribución binomial** de parámetros n y p, $X = B(n,p)$, su funcion de probabilidad es: $p(X=k) = p(k \text{ éxitos}) = p(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$

Si se realizan n pruebas: $\mu = n\,p$, $\sigma^2 = n\,p\,q$, $\sigma = \sqrt{npq}$

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD CONTINUA:



La **función de densidad** de una v.a. continua, $f(x)$, es una función que debe cumplir:

1. $f(x) \geq 0$ en todo su dominio.
2. El área encerrada bajo la curva $f(x)$ vale 1.

La probabilidad de que la variable tome valores entre x_1 y x_2, $p(x_1 \leq X \leq x_2)$, equivale al área encerrada entre el eje de abscisas, la función de densidad y las rectas $x = x_1$ y $x = x_2$.

Si la v.a. continua sigue una **distribución normal** de media μ y desviación típica σ, **$N(\mu,\sigma)$**,su función de densidad tiene por expresión: $f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\,e^{\frac{-1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$

La distribución normal más sencilla, la de media $\mu=0$ y desviación típica $\sigma=1$, se llama **distribución normal estándar** o tipificada, y se representa con la letra **Z**. El área encerrada bajo cualquier tramo de esta curva, se determina mediante tablas. Para calcular las probabilidades del resto de las distribuciones normales, se ponen en relación con la estándar.

Manejo de tablas: **$p(Z \leq a'bc) = n$**, siendo n el nº de la fila $a'b$ y columna c.

$p(Z \geq a'bc)$ $= 1 - p(Z \leq a'bc) =$ **$1-n$**

$p(Z \leq -a'bc)$ $= p(Z \geq a'bc) = 1- p(Z \leq a'bc) =$ **$1-n$**

$p(Z \geq -a'bc)$ $= p(Z \leq a'bc) =$ **n**

$p(a \leq Z \leq b) = p(Z \leq b) - p(Z \leq a)$

Para calcular las probabilidades de una distribución $N(\mu,\sigma)$ utilizando tablas, se efectúa el cambio de variable: $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$

Si n es un nº muy elevado y n y q no difieren mucho de $0'5$, la distribución binomial se puede **aproximar por una normal**: $N\left(np,\sqrt{npq}\right)$. La aproximación es mejor cuanto mayor sea el valor de npq. En la práctica la aproximación es satisfactoria si $npq>10$.

Corrección de continuidad: $p(X_B < r) = p(X_N \leq r-0'5)$ para no incluir el valor r.

$p(X_B \leq r) = p(X_N \leq r+0'5)$ para incluir el valor r.

$p(X_B = r) = p(r-0'5 \leq X_N \leq r+0'5)$.

EJERCICIOS

CÁLCULO DE PROBABILIDADES

1. En una bolsa hay 5 bolas numeradas del 1 al 5. ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar tres de ellas, las tres sean impares?

   a) Si las extracciones son con reemplazamiento.

   b) Si las extracciones son sin reemplazamiento.

   Sol: a) 27/125, b) 1/10

2. Extraemos dos cartas de una baraja española. Calcula la probabilidad de obtener:

   a) 2 ases b) Ningún as c) Algún as

   Sol: a) 1/130, b) 21/26, c) 5/26

3. Se lanzan tres monedas y se cuenta el número de caras que salen. Calcula la probabilidad de obtener:

   a) Una cara. b) Más de una cara.

   Sol: a) 3/8, b) ½

4. En un examen hay que contestar a 2 temas elegidos al azar entre 30. Un alumno ha estudiado solo 12 de los 30 temas. Halla la probabilidad de que:

   a) El alumno haya estudiado los dos temas elegidos.
   b) Solo haya estudiado uno de los dos temas elegidos.
   c) No haya estudiado ninguno de los dos temas elegidos.

   Sol: a) 0,15, b) 0,50, c) 0,35

5. En una urna A hay 5 bolas numeradas del 1 al 5 y en otra urna B hay 4 bolas numeradas del 6 al 9. Se lanza una moneda: si sale cara, se extrae una bola de la urna A, y si sale cruz, se extrae una bola de la urna B. Calcula la probabilidad de que la bola extraída sea:

   a) La que lleva el número 5.
   b) La que lleva el número 8.
   c) Una que lleve un número par.

   Sol: a) 0,1, b) 0,125, c) 0,45

6. Extraemos al azar una ficha de un dominó normal (28 fichas) y sumamos los puntos de sus dos mitades. Calcula la probabilidad de que la suma de puntos sea 6.

   Sol: 0,14

7. Una fábrica tiene tres máquinas que fabrican tornillos. La máquina A produce el 50% del total de tornillos; la máquina B, el 30%, y la C, el 20%. De la máquina A salen un 5% de tornillos defectuosos; de la B, un 4%, y de la C, un 2%. Calcula la probabilidad de que un tornillo elegido al azar sea defectuoso.

   Sol: 0,041

DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD

1. Completa la siguiente tabla y halla los parámetros μ y σ:

x_i	0	10	50	100
p_i	0,9	0.06		0.01

Sol: p(50)=0.03; μ = 3,1; σ=13,09

2. Describe, mediante una tabla x_i , p_i, la distribución del "número de caras" al lanzar 3 monedas. Halla los parámetros μ y σ.

Sol: μ = 1,5; σ = 0,87

3. Sacamos dos cartas de una baraja y anotamos el número de ases (0, 1 ó 2).
   a) ¿Cuál es la distribución de probabilidad?
   b) Calcula la media y la desviación típica.

Sol: b) μ = 0,2 y σ = 0,42

4. Se lanzan tres monedas y se cuenta el número de caras obtenidas. Haz una tabla con las probabilidades, represéntala gráficamente y calcula la media y la desviación típica.

Sol: μ = 1,5; σ = 0,87

5. Una urna contiene 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 verdes. Se hacen dos extracciones sin reemplazamiento y se anota el número de bolas rojas extraídas.
   a) Haz la tabla de la distribución de probabilidad.
   b) Haz otra tabla suponiendo que hay reemplazamiento.

Sol: a) p(0)=42/90; p(1)= 42/90; p(2)=6/90, b) $p(0)=(7/10)^2$; P(1) = 42/90 ; $p(2) = (3/10)^2$

6. En una urna A hay 5 bolas numeradas del 1 al 5 y en otra urna B hay 4 bolas numeradas del 6 al 9. Se lanza una moneda: si sale cara, se saca una bola de A, y si sale cruz, se saca de B. Se observa el número que tiene la bola.
   a) Haz la tabla de la distribución de probabilidad.
   b) Represéntala gráficamente.
   c) Calcula μ y σ.

Sol: c) μ = 5,25 y σ=2,59

7. En una lotería de 1000 números se reparten los premios siguientes:
   - A un número elegido al azar, 5 000 €.
   - Al anterior y al posterior, 1 000 €.
   - A los 99 que terminan en la misma cifra que el ganador, 10 €.
   - Al resto de números, nada.

   a) Haz la tabla con los valores 0, 10, 1000 y 5000 con sus correspondientes probabilidades.
   b) Calcula los parámetros μ y σ.

Sol: b) μ = 7,99 y σ=164,15

DISTRIBUCIÓN BINOMIAL

1. En una distribución binomial B(10; 0,4), halla P[x = 0], P[x = 3], P[x = 5], P[x = 10] y el valor de cada uno de los parámetros μ y q.

Sol: $P[x = 0]=0,6^{10}$, P[x = 3]=0,215, P[x = 5]=0,201, $P[x = 10]=0,4^{10}$; μ = 4 y σ=1,55

2. Lanzamos 7 monedas. Calcula las probabilidades de 3 caras, 5 caras y 6 caras. Halla los valores de μ y q.

Sol: p(3) = 0,273; p(5)=0,164; p(x=6) = 0,0547 ; μ = 3,5 y σ= 1,323

3. Reconoce en cada uno de los siguientes ejercicios una distribución binomial y di los valores de n, p, μ y σ.
   a) Un examen tipo test consta de 50 preguntas, cada una con tres respuestas, de las que solo una es correcta. Se responde al azar. ¿Cuál es el número de preguntas acertadas?
   b) En el examen descrito en el apartado anterior, un alumno conoce las respuestas de 20 preguntas y responde las restantes al azar. Nos preguntamos cuántas de ellas acertará.
   c) Una moneda se lanza 400 veces. Número de caras.
   d) El 11% de los billetes de lotería reciben algún tipo de premio, aunque sea el reintegro. En una familia juegan a 46 números.
   e) El 1% de ciertas soldaduras son defectuosas y revisamos mil de ellas. Número de soldaduras defectuosas que habrá.

Sol: a) B (50,1/3); μ = 50/3; σ = 3,33, b) B(30,1/3) ; μ = 10; σ = 2,58, c) B(400,1/2); μ = 200; σ = 10, d) B (46; 0,11); μ = 5,06; σ = 2,12 , e) B (1 000; 0,01); μ = 10; σ = 3,15

4. En una distribución binomial B(7; 0,4) calcula:

a) $P[x = 2]$	b) $P[x = 5]$	c) $P[x = 0]$
d) $P[x > 0]$	e) $P[x > 3]$	f) $P[x < 5]$

Sol: a) 0.261, b) 0.077, c) 0.028, d) 0.972, e) 0,290, f) 0.904

5. El 3% de la población tiene el grupo sanguíneo B^-. ¿Qué probabilidad existe de que al tomar 4 personas al azar, la mitad pertenezca a ese grupo?

Sol: 0,0051

6. Suponiendo que la probabilidad de dar a luz un varón sea de 0,51, y la de que nazca una niña de 0,49. ¿Qué proporción de mellizos del mismo sexo cabe esperar?

Sol: 0,5002

7. Una determinad enfermedad tiene una tasa de mortalidad del 15%. Al ensayar un nuevo fármaco en un grupo de 50 pacientes voluntarios, 4 fallecieron. ¿Es suficiente este resultado para determinar que el fármaco es inadecuado?

Sol: p = 0,066, luego el fármaco es adecuado

8. El 65% de los alumnos de un cierto instituto cursan estudios universitarios al terminar el Bachillerato. En un grupo de ocho alumnos elegidos al azar, halla la probabilidad de que estudien una carrera:
   a) Alguno de ellos.
   b) Más de seis.
   c) Calcula la media y la desviación típica.

Sol: a) 0,9998, b) p(x>6) =0,169 ; c) μ = 5,2, σ = 1,35

9. Si un estudiante responde al azar a un examen de 8 preguntas de verdadero o falso.
   a) ¿Cuál es la probabilidad de que acierte 4?
   b) ¿Cual es la probabilidad de que acierte dos o menos?
   c) ¿Cual es la probabilidad de que acierte cinco o más?
   d) ¿Cuanto valen la media y la varianza del número de preguntas acertadas?

Sol: a) 0,273, b) 0,144, c) 0,364, d) μ = 4, σ = 2

DISTRIBUCIONES DE VARIABLE CONTINUA: DISTRIBUCIÓN NORMAL

1. Calcula k para que $f(x)=\begin{cases} k & \text{si } x\in[3,8] \\ 0 & \text{si } x\notin[3,8] \end{cases}$ sea una función de densidad. Halla las probabilidades:

   a) $P[4<x<6]$ b) $P[2<x\le 5]$ c) $P[x=6]$ d) $P[5<x\le 10]$

   Sol: k = 1/5 ; a) p = 2/5; b) p = 2/5; c) p = 0; d) p = 3/5

2. Calcula m para que $f(x)=\begin{cases} mx & \text{si } x\in[3,7] \\ 0 & \text{si } x\notin[3,7] \end{cases}$ sea una función de densidad. Halla las probabilidades:

   a) $P[3<x<5]$ b) $P[5\le x<7]$ c) $P[4\le x\le 6]$ d) $P[6\le x\le 11]$

   Sol: m = 1/20; a) p = 2/5; b) p = 3/5; c) p = 1/2; d) p = 13/40

3. En una distribución $N(110,10)$ calcula:

   a) $P(x > 110)$ b) $P(110<x<120)$ c) $P(110<x<130)$ d) $P(120<x<130)$
   e) $P(90<x<100)$ f) $P(90<x<120)$ g) $P(x<100)$

   Sol: a) 0,5; b) 0,3413; c) 0,4772; d) 0,1359; e) 0,1359; f) 0,1587

4. Halla:

   a) $P[z > 1,3]$ b) $P[z < -1,3]$ c) $P[z > -1,3]$ d) $P[1,3 < z < 1,96]$
   e) $P[-1,96 < z < -1,3]$ f) $P[-1,3 < z < 1,96]$ g) $P[-1,96 < z < 1,96]$

   Sol: a) 0,0968 b) 0,0968 c) 0,9032 d) 0,0718 e) 0,0718 f) 0,8782 g) 0,95

5. En una distribución $N(173, 6)$, halla las siguientes probabilidades:

   a) $p(x \le 173)$ b) $p(x \ge 180,5)$ c) $p(174 \le x \le 180,5)$ d) $p(161 \le x \le 180,5)$
   e) $p(161 \le x \le 170)$ f) $p(x = 174)$ g) $p(x > 191)$ h) $p(x < 155)$

   Sol: a) 0,5 b) 0,1056 c) 0,3269 d) 0,8716 e) 0,2857 f) 0 g) 0,0013 h) 0,0013

6. Calcula las probabilidades de las siguientes distribuciones binomiales mediante aproximación a la normal correspondiente

   a) x es $B(100; 0,1)$. Calcula $P(x = 10)$, $p(x < 2)$ y $p(5 < x < 15)$.
   b) x es $B(1\,000; 0,02)$. Calcula $p(x > 30)$ y $p(x < 80)$.
   c) x es $B(50; 0,9)$. Calcula $P(x > 45)$ y $P(x \le 30)$.

   Sol: a) N (10; 3); P(x = 10) = 0,135; P(x < 2) = 0,0023; P(5 < x < 15) = 0,8664. b) N (20; 4,427); p(x > 30) = 0,0089; p(x < 80) = 1. c) N (45; 2,12); P(x > 45) = 0,4052; p(x ≤ 30) = 0)

7. En una clase de 30 alumnos la probabilidad de que una persona tenga los ojos azules es 0,35; ¿Cuál es la probabilidad de que menos de 10 tengan los ojos azules? ¿Cuál es la probabilidad de que 1 tenga los ojos azules?

   Sol: 0,3520; 0,1480

8. La media y los que de los pesos de 500 estudiantes de un colegio es 70 kg y la desviación típica 3 kg. Suponiendo que los pesos se distribuyen normalmente, hallar cuántos estudiantes pesan:

   a) Entre 60 kg y 65 kg. b) Más de 90 kg. c) Menos de 64 kg.
   d) 64 kg. e) 64 kg o menos.

   Sol: a) 476, b) 0, c) 11, d) 0, e) 11

9. En una ciudad se estima que la temperatura máxima en el mes de junio sigue una distribución normal, con media 23° y desviación típica 5°. Calcu lar el número de días del mes en los que se espera alcanzar máximas entre 21° y 27°.

Sol: 13 días

10. Se supone que los resultados de un examen siguen una distribución normal con media 78 y varianza 36. Se pide:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que se presenta el examen obtenga una calificación superior a 72?

b) Calcular la proporción de estudiantes que tienen puntuaciones que exceden por lo menos en cinco puntos de la puntuación que marca la frontera entre el Apto y el No-Apto (son declarados No-Aptos el 25% de los estudiantes que obtuvieron las puntuaciones más bajas).

c) Si se sabe que la calificación de un estudiante es mayor que 72 ¿cuál es la prioridad de que su calificación sea, de hecho, superior a 84?

Sol: a) 0,5636, b) N=70, 19%, c) 0,774

11. Varios test de inteligencia dieron una puntuación que sigue una ley normal con media 100 y desviación típica 15.

a) Determinar el porcentaje de población que obtendría un coeficiente entre 95 y 110.

b) ¿Qué intervalo centrado en 100 contiene al 50% de la población?

c) En una población de 2500 individuos ¿cuántos individuos se esperan que tengan un coeficiente superior a 125?

d) En un examen tipo test de 200 preguntas de elección múltiple, cada pregunta tiene una respuesta correcta y una incorrecta. Se aprueba si se contesta a más de 110 respuestas correctas. Suponiendo que se contesta al azar, calcular la probabilidad de aprobar el examen.

Sol: a) 0.3779, b) 90,110. c) 119. d) 0,07927

12) En una distribución normal de media 4 y desviación típica 2, calcular el valor de a para que: $P(4-a \leq x \leq 4+a) = 0.5934$

Sol: a = 1,606

13) En una urna hay 3 bolas rojas, 2 blancas y 5 verdes. Sacamos una bola, anotamos su color y la devolvemos a la urna. Si repetimos la experiencia 50 veces, ¿cuál es la probabilidad de sacar roja en más de 20 ocasiones?

Sol: 0,0446

14) Si X es una variable aleatoria distribuida según una distribución $N(\mu, \sigma)$, hallar: $p(\mu-3\sigma \leq X \leq \mu+3\sigma)$

Sol: 99,74%

ÍNDICE